SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE

Soient $b>0$ et $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue, et telle que :

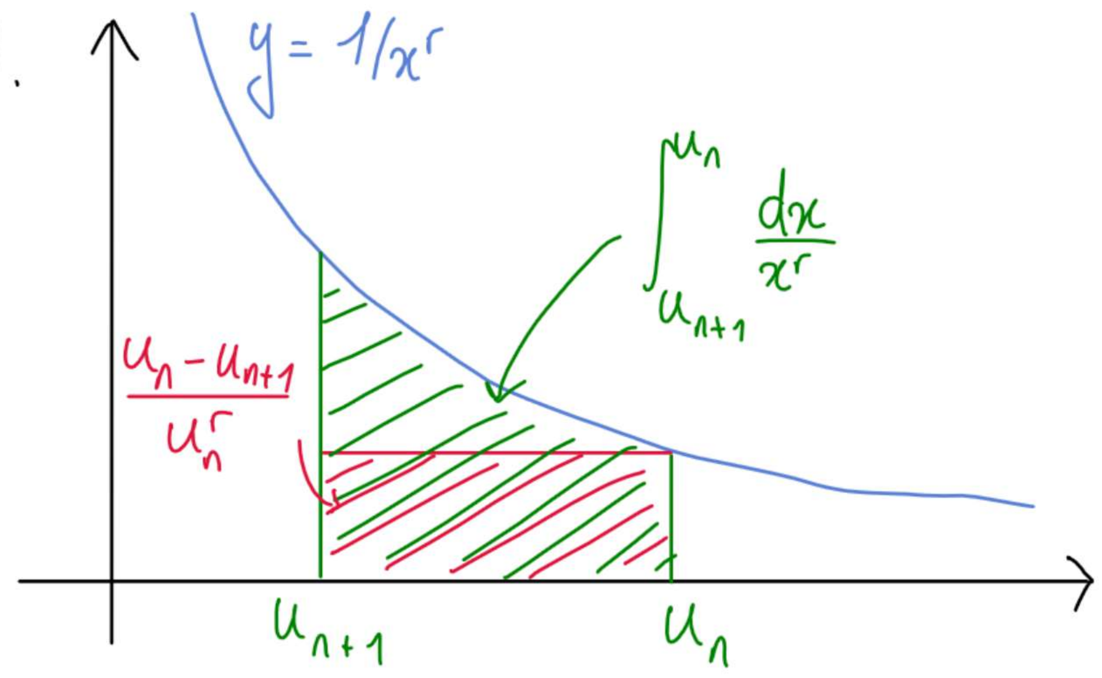
- $f(0)=0$ et $\forall x \in]0,b]$, $f(x) < x$,
- Il existe $\lambda > 0$ et $r > 1$ tels que $f(x) = x - \lambda x^r \underset{x\to 0}{+o}(x^r)$.

Pour tout $c \in]0,b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est contenue dans $]0,b[$, et tend vers 0. Plus précisément, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Application : Pour $f : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

▸ f étant croissante, s'il existait $y \in]0,b[$ tel que $f(y)=0$, alors $f_{|[0,y]} = 0$, contredisant le développement limité de f. Ainsi, $\forall x \in]0,b[$, $0 < f(x) \leq x < b$. A fortiori, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien contenue dans $]0,b[$.

▸ Comme f est croissante, $(u_n)_n$ est monotone, mais $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 < 0$ donc $(u_n)_n$ est décroissante. Enfin, $(u_n)_n$ est minorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ admet une limite $\ell \in [0,b]$. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f, donc par hypothèse sur f, $\ell = 0$.



▸ $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)$ (car $u_n \longrightarrow 0$), donc $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^r} = -\lambda + o(1)$,

donc $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \lambda$. Ensuite, comme le suggère la figure ci-contre, $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dx}{x^r} = \frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r}$. Montrons donc que $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} \sim \lambda$:

$$u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} = f(u_n)^{1-r} - u_n^{1-r} = u_n^{1-r}\left[\frac{1}{u_n^{1-r}} f(u_n)^{1-r} - 1\right] = u_n^{1-r}\left[\frac{1}{u_n^{1-r}}\left(u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r)\right)^{1-r} - 1\right]$$

$$= u_n^{1-r}\left[(1 - \underbrace{\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})}_{\longrightarrow 0})^{1-r} - 1\right] = u_n^{1-r}\left[1 + (1-r)(-\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})) + o(-\lambda u_n^{1-r} + o(u_n^{1-r})) - 1\right]$$

$$= u_n^{1-r}\left[(1-r)(-\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})) + o(u_n^{r-1})\right] = -\lambda(1-r) + o(1)$$

et donc $\frac{u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r}}{1-r} \sim -\lambda$, autrement dit $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{r-1} \sim \lambda$. Or $\lambda > 0$ donc $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{r-1} > 0$ à partir d'un certain rang, et $\sum_n \lambda$ diverge, donc $n\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{r-1} = \frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{r-1}$, donc $\frac{u_n^{1-r}}{n\lambda(r-1)} = \frac{u_0^{1-r}}{n\lambda(r-1)} - \frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{n\lambda(1-r)} \longrightarrow 0+1$, donc $u_n^{1-r} \sim n\lambda(r-1)$, donc $u_n \sim (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$. ■

Application : ▸ f vérifie les hypothèses : f est croissante et continue sur $[0,b]$, $f(0) = \ln(1) = 0$, $\forall x \in]0,b]$, $f(x) = \ln(1+x) < x$ par stricte concavité de $\ln$, et $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 \underset{x\to 0}{+o}(x^2)$, i.e. $\lambda = \frac{1}{2} > 0$ et $r = 2 > 1$. D'après le théorème, $u_n \sim \left(n\frac{1}{2}(2-1)\right)^{\frac{1}{1-2}}$, i.e. $u_n \sim \frac{2}{n}$.

▸ Pour détailler le développement asymptotique, il faut reprendre celui de $u_{n+1}^{1-r} - u_n^{1-r} = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}$:

$$u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} = u_n^{-1}\left[\frac{1}{u_n^{-1}} f(u_n)^{-1} - 1\right] = u_n^{-1}\left[\frac{1}{u_n^{-1}}\left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 + o(u_n^3)\right)^{-1} - 1\right]$$

$$= u_n^{-1}\left[(1+v_n)^{-1} - 1\right] \qquad \text{où } v_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) \longrightarrow 0$$

$$= u_n^{-1}\left[1 + (-1)v_n + \frac{(-1)(-1-1)}{2}v_n^2 + o(v_n^2) - 1\right]$$

$$= u_n^{-1}\left[\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) + \left(-\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2)\right)^2 + o(u_n^2)\right]$$

$$= u_n^{-1}\left[\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + o(u_n^2) + \frac{1}{4}u_n^2 + o(u_n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + o(u_n)$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$. D'après ce qui précède, $x_n \sim -\frac{1}{12}u_n \sim -\frac{1}{6n} \sim -\frac{1}{6(n+1)}$. Or $-\frac{1}{6(n+1)} < 0$ et $\sum_n -\frac{1}{6(n+1)}$ diverge, donc $-\frac{1}{6}\ln(n) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-1}{6(k+1)} \sim \sum_{k=0}^{n-1} x_k = u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{1}{2}n$, donc $u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2} + \frac{\ln(n)}{6} = o(\ln(n))$,

donc :

$$\frac{u_n^{-1} - \frac{n}{2} + \frac{\ln(n)}{6}}{\ln(n)} = \frac{u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2} + \frac{\ln(n)}{6}}{\ln(n)} + \frac{u_0^{-1}}{\ln(n)} = o(1) + \frac{u_0^{-1}}{\ln(n)} \longrightarrow 0+1$$

et donc $u_n^{-1} = \frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))$, donc :

$$u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))\right)^{-1} = \frac{2}{n}\Bigg(1 - \underbrace{\frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}_{\longrightarrow 0}\Bigg)^{-1} = \frac{2}{n}\left[1 - (-1)\left(-\frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) + o\left(-\frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\right]$$

Autrement dit $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. ■