Rombaldi [2e] (p 468, 476)

# LOI D'INERTIE DE SYLVESTER

151, 170, 171 (159)

Soit $(E,q)$ un espace quadratique réel de dimension $n$.

<u>Lemme 1</u> : Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1▸ $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant \dim(E)$ avec égalité si $q$ est non dégénérée

2▸ $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si $q_{|F}$ est non dégénérée.

<u>Thm/Def 2</u> : Il existe un unique couple $(s,t) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour toute base $q$-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$, on a :

$$s = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid q(e_i) > 0\} \quad \text{et} \quad t = \#\{i \in [\![1,n]\!] \mid q(e_i) < 0\}.$$

En particulier $s + t = \mathrm{rg}(q)$. On appelle *signature* de $q$ le couple $(s,t)$.

<u>Thm 3</u> : Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $E$ sur lesquels la restriction de $q$ est définie positive (resp. définie négative). Alors $s = \max\limits_{E^+ \in \mathcal{P}} \dim(E^+)$ et $t = \max\limits_{E^- \in \mathcal{N}} \dim(E^-)$ avec la convention $\max(\emptyset) = 0$.

---

<u>Preuve de Lemme 1</u> : 1▸ Si $F = \{0\}$, alors $F^\perp = E$ et $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geqslant \dim(E)$. Supposons que $F \neq \{0\}$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$, pour $i \in [\![1,p]\!]$ posons $\ell_i = \varphi(\cdot, e_i)$ où $\varphi$ est la forme polaire de $q$. Posons $f = (\ell_1, \dots, \ell_p)$. On a :

$$F^\perp \big(= \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\}\big) = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ \varphi(x, e_i) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\ell_i) = \mathrm{Ker}(f).$$

Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(F^\perp) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) \geqslant \dim(E) - p = \dim(E) - \dim(F)$ (NB : $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\ell_1, \dots, \ell_p) \leqslant p$) avec égalité si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = p$, i.e. $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ est libre. ■

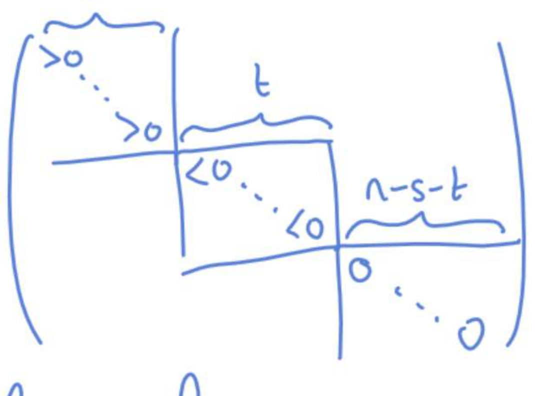
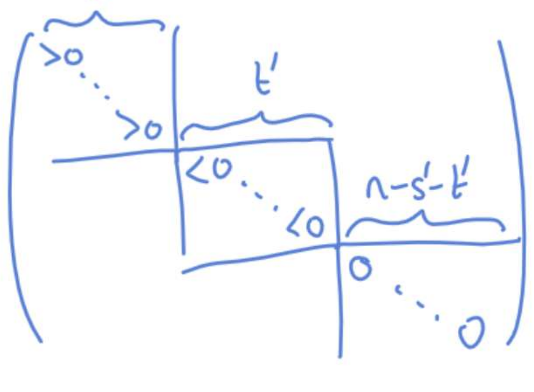
▹ Supposons que $q$ est non dégénérée, en particulier $q_{|F}$ l'est. Alors $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ est libre : en effet, soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p$ tel que $\lambda_1 \ell_1 + \dots + \lambda_p \ell_p = 0$. Alors $\forall x \in F$, $0 = \lambda_1 \ell_1(x) + \dots + \lambda_p \ell_p(x) = \varphi(x, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i)$, donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F^\perp$, mais $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F$, donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ par non dégénérescence de $q_{|F}$, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ par liberté de $(e_1, \dots, e_p)$.

▹ Rq : pour $q$ dégénérée et $F = E$, on a $F^\perp \neq \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(F^\perp) > \dim(E)$.

2▸ ▹ Supposons $q_{|F}$ non dégénérée. Nécessairement, $F \neq \{0\}$, et d'après le calcul précédent, $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ est libre. La démonstration précédente couplée au fait que $F \cap F^\perp = \{0\}$ montre que $E = F \oplus F^\perp$ par dimension.

▹ Si $E = F \oplus F^\perp$, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$, i.e. $q_{|F}$ est non dégénérée. ■

<u>Preuve de Thm/Def 2</u> : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases $q$-orthogonales de $E$. Quitte à permuter $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, supposons que $\forall i \in [\![1,s]\!]$, $\forall i' \in [\![1,s']\!]$, $q(e_i) > 0$ et $q(e'_{i'}) > 0$, $\forall i \in [\![s+1, s+t]\!]$, $\forall i' \in [\![s'+1, s'+t']\!]$, $q(e_i) < 0$ et $q(e'_{i'}) < 0$, et $\forall i \in [\![t+1, n]\!]$, $\forall i' \in [\![t'+1, n]\!]$, $q(e_i) = 0$ et $q(e'_{i'}) = 0$. ⚠ Au tableau, plutôt que de perdre 1'30" à écrire tout ça, on préfèrera faire le dessin suivant :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) =$  , $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) =$ 

qui est bien plus rapide et plus clair.)

Le but est de montrer que $s = s'$ et $t = t'$. Comme $s + t = s' + t' = \mathrm{rg}(q)$, il suffit de montrer que $s = s'$.

Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ et $G = \mathrm{Vect}(e'_{s'+1}, \dots, e'_n)$. Si $s \geqslant 1$, alors $F \neq \{0\}$, et pour tout $x = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i \in F \setminus \{0\}$, $q(x) = \sum_{i=1}^{s} q(e_i) x_i^2 > 0$. De même, si $s' < n$, alors $\forall x \in G \setminus \{0\}$, $q(x) < 0$. En particulier, $F \cap G = \{0\}$. Si $s = 0$ ou $s' = n$, on a toujours $F \cap G = \{0\}$. De là, $n \geqslant \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = s + n - s'$, donc $s' \geqslant s$. Comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, donc $s$ et $s'$ jouent des rôles symétriques, on a bien $s = s'$. ■

<u>Preuve de Thm 3</u> : Posons $s' = \max\limits_{E^+ \in \mathcal{P}} \dim(E^+)$ et $t' = \max\limits_{E^- \in \mathcal{N}} \dim(E^-)$. Par définition de $(s,t)$ la signature de $q$, on a $s \leq s'$ et $t \leq t'$. Si $\mathcal{P} = \emptyset$, alors $s = s' = 0$. Supposons $\mathcal{P} \neq \emptyset$, soit $F \in \mathcal{P}$ tel que $\dim(F) = s'$. Soit $(e_1, \dots, e_{s'})$ une base $q$-orthogonale de $F$ que l'on complète en une base $q$-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$ (ce qui est possible car $q_{|F}$ est définie positive, donc non dégénérée, donc $E = F \oplus F^{\perp}$ d'après Lemme 1). Par maximalité de $F$ dans $\mathcal{P}$, $q(e_{s'+1}), \dots, q(e_n) \leq 0$, donc par unicité de la signature, $s = s'$. De même $t = t'$. ■

$$\mathrm{Mat}_{\dots}(q) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{smallmatrix} >0 & & \\ & \ddots & \\ & & >0 \end{smallmatrix}}^{s} & \overbrace{\phantom{xxxx}}^{n-s} \\ \hline & \begin{smallmatrix} \leq 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \leq 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

---

## COMMENTAIRES :

⚠ Avec Lemme 1, le développement est un peu long : il nécessite un rythme soutenu sans hésitation. Sans Lemme 1, le développement est trop court. Il faut optimiser le temps d'écriture au tableau en ne gardant que le nécessaire.
Pour les leçons 151 et 170, il est préférable de présenter Lemme 1 quitte à laisser Thm 3 de côté. Pour la leçon 171, il vaut mieux présenter Lemme 1 en dernier quitte à ne pas faire les deux points, voire le remplacer par un exemple de réduction de GAUSS comme ci-dessous (cela peut s'avérer être un meilleur choix selon votre plan de leçon).

- La loi d'inertie de SYLVESTER est souvent formulé de la manière suivante : « il existe $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in (E^\vee)^r$ libre et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in (\mathbb{R}^{+*})^r$ tels que $q = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{t} \lambda_i \varphi_i^2$. Le couple $(s,t)$ dépend uniquement de $q$ ».

- Pour trouver la signature de $q$, on utilise le plus souvent l'algorithme de réduction de GAUSS. À ce titre, vous pouvez l'appliquer sur un exemple s'il vous reste 2 minutes.

  <u>Ex</u> : $q(x,y,z) = xy + xz + yz = (x+y)(x+z) - z^2 = \frac{1}{4}(x+y+x+z)^2 - \frac{1}{4}(x+z-x-y)^2 - z^2$
  $= \frac{1}{4}(2x+y+z)^2 - \frac{1}{4}(y-z)^2 - z^2$

  En particulier, $q$ est de signature $(1,2)$.

- De la loi d'inertie de SYLVESTER on déduit la classification des formes quadratiques réelles : deux formes quadratiques sont équivalentes si, et seulement si elles ont mêmes rang et signature.

- La loi d'inertie de SYLVESTER permet de montrer le résultat suivant (utile en optimisation des fonctions différentiables) : Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A$ est définie positive si, et seulement si ses mineurs principaux, i.e. les $\det((a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$ avec $1 \leq k \leq n$, sont strictement positifs (Rombaldi [2e] (p 478) Thm 15.16).