Mansuy - Mneimné
(p 154-155)

CRITÈRE DE KLARÈS

154, 155, 157
(148)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel(#) de dimension finie $n \geq 1$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $ad_u : v \mapsto u\circ v - v\circ u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Thm : u est diagonalisable si, et seulement si $\mathrm{Ker}(ad_u) = \mathrm{Ker}(ad_u^2)$.

Comme E est complexe, u est trigonalisable,(☆) donc on dispose de la décomposition de DUNFORD $u = d+n$ (avec d diagonalisable, n nilpotent, $d\circ n = n\circ d$ et, et $(d,n) \in \mathbb{C}[u]^2$.)

- Supposons que $\mathrm{Ker}(ad_u) = \mathrm{Ker}(ad_u^2)$. Comme $n \in \mathbb{C}[u]$, n commute avec u, i.e. $ad_u(n) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $n \in \mathrm{Ker}(ad_u)$. Classiquement,(*) $\mathrm{Ker}(ad_u) \cap \mathrm{Im}(ad_u) = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Il suffit de montrer que $n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour montrer que $u = d$ est diagonalisable.

  Montrons que $n \in \mathrm{Im}(ad_u)$, i.e. $\exists v \in \mathcal{L}(E) : n = u\circ v - v\circ u$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $M_k = \mathrm{Diag}(1,2,\dots,k) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, et notons J_k le bloc de JORDAN élémentaire d'ordre k : $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. On montre que $J_k M_k - M_k J_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k-1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J_k$. Soit $\lambda \in Sp(u)$, notons $F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda id_E)^{\mu_{\chi_u}(\lambda)}\right)$ le sous-espace caractéristique de u associé à λ. On rappelle (voir la démonstration de la décomposition de DUNFORD) que sur F_λ, u induit un endomorphisme u_λ, d induit $\lambda\, id_{F_\lambda}$, et n induit un endomorphisme nilpotent n_λ. D'après le théorème de décomposition de JORDAN, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de F_λ et $(k_1,\dots,k_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(n_\lambda) = \mathrm{Diag}(J_{k_1},\dots,J_{k_s})$ par blocs, avec $k_1+\dots+k_s = \dim(F_\lambda)$. Posons alors $V_\lambda = \mathrm{Diag}(M_{k_1},\dots,M_{k_s})$ par blocs, et v_λ l'endomorphisme de F_λ de matrice V_λ dans $\mathcal{B}_\lambda$. On obtient alors $n_\lambda = n_\lambda\circ v_\lambda - v_\lambda \circ n_\lambda$ d'après le calcul précédent. Comme $\lambda id_{F_\lambda}\circ v_\lambda - v_\lambda\circ(\lambda id_{F_\lambda}) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $n_\lambda = u_\lambda\circ v_\lambda - v_\lambda \circ u_\lambda$. Comme $\chi_u(u) = 0$ (CAYLEY, HAMILTON), on a $E = \bigoplus_{\lambda\in Sp(u)} F_\lambda$ (lemme des noyaux), et on définit l'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ qui induit v_λ sur F_λ pour tout $\lambda \in Sp(u)$. Il vient que $n = u\circ v - v\circ u$, donc $n \in \mathrm{Im}(ad_u)$.

- Supposons que u est diagonalisable. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit $G_f : v \in \mathcal{L}(E) \longmapsto f\circ v$ et $D_f : v \in \mathcal{L}(E) \longmapsto v\circ f$, de sorte que $ad_f = G_f - D_f$. Remarquons que $(G_f, D_f) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))^2$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_f^k = G_{f^k}$ et $D_f^k = D_{f^k}$. On en déduit que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(G_f) = G_{P(f)}$ et $P(D_f) = D_{P(f)}$. En particulier, $\pi_u(D_u) = D_{\pi_u(u)} = D_{0_{\mathcal{L}(E)}} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\pi_u(G_u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Or(†) u est diagonalisable, donc π_u est scindé à racines simples, donc G_u et D_u sont diagonalisable. Remarquons que $D_u\circ G_u = G_u \circ D_u$, donc G_u et D_u sont codiagonalisables.(‡) En particulier, $ad_u = G_u - D_u$ est diagonalisable.(§)
  Terminons la preuve : déjà, $\mathrm{Ker}(ad_u) \subset \mathrm{Ker}(ad_u^2)$. Réciproquement,(◊) soit $v \in \mathrm{Ker}(ad_u^2)$. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de ad_u, associés à des valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, alors $ad_u(v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k^*(v) e_k$, mais $0 = ad_u^2(v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 e_k^*(v) e_k$, et $(e_1,\dots,e_n)$ est libre donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k^2 e_k^*(v) = 0$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k e_k^*(v) = 0$, donc $ad_u(v) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $v \in \mathrm{Ker}(ad_u)$.

(#): Le résultat reste vrai si E est un espace vectoriel sur un corps algébriquement clos qui n'est pas $\mathbb{C}$. Dans l'idée, il faut que les polynômes soient scindés. On pourra voir le dernier commentaire plus bas.

(*): Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. On a déjà $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ car f est linéaire. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, donc $f(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, donc $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, donc $x = f(y) = 0$.

(†): Rappel : f diagonalisable $\Leftrightarrow$ π_f est scindé à racines simples $\Leftrightarrow$ $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(‡) : Par récurrence sur n : si $\dim(n)=1$, alors ça marche. Récurrons : supposons que $\dim(E)=n+1$, soit $(f_i)_{i\in I}\in\mathcal{L}(E)^I$ telle que les $f_i, i\in I$ commutent deux à deux et sont diagonalisables. Si tous les $f_i, i\in I$ sont des homotéties, alors il n'y a rien à faire. Supposons qu'il existe $i_0\in I$ tel que f_{i_0} n'est pas une homotétie : comme f_{i_0} est diagonalisable, on peut décomposer E en somme directe des sous-espaces propres de f_{i_0} : $E=P_1\oplus\cdots\oplus P_r$ avec $r>1$, a fortiori $\dim(P_1),\dots,\dim(P_r)<\dim(E)$. Soit $i\in I$. Comme f_i et f_{i_0} commutent, pour tous $j\in[\![1,r]\!]$ et $x\in P_j=\mathrm{Ker}(f_{i_0}-\lambda_j \mathrm{id}_E)$, on a $(f_{i_0}-\lambda_j\,\mathrm{id}_E)(f_i(x)) = f_i((f_{i_0}-\lambda_j\,\mathrm{id}_E)(x)) = f_i(0)=0$, donc P_j est stable par f_i, donc f_i induit un endomorphisme $f_{i,j}$ sur P_j. Pour tout $j\in[\![1,r]\!]$, $(f_{i,j})_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent 2 à 2 sur un espace de dimension $\leq n$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_j$ de P_j qui diagonalise simultanément les $f_{i,j}$, $i\in I$. La base $\mathcal{B}=\bigcup_{j=1}^{r}\mathcal{B}_j$ diagonalise simultanément les f_i, $i\in I$. //

(§) : Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de codiagonalisation de G_u et D_u. Alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_k\in\mathbb{C}$ et $\mu_k\in\mathbb{C}$ tels que $G_u(e_k)=\lambda_k e_k$ et $D_u(e_k)=\mu_k e_k$, donc $\mathrm{ad}_u(e_k)=(\lambda_k-\mu_k)e_k$, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{ad}_u)=\mathrm{Diag}(\lambda_1-\mu_1,\dots,\lambda_n-\mu_n)$, et donc $\mathcal{B}$ diagonalise ad_u, et ad_u est diagonalisable.

(◇) : Une autre justification est la suivante : la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u)$ est le nombre de valeurs propres nulles de ad_u, idem pour ad_u^2, mais $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}_u^2)=\{\lambda^2 : \lambda\in\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}_u)\}$, donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u)=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2)$ par inclusion et égalité des dimensions. (C'est une manière plus rigoureuse de dire "ça se voit sur la matrice", qui est exactement le même argument donné dans le développement plus haut, mais formalisé différemment).

COMMENTAIRES :

- Comme le suggère la longueur des notes en bleu, il y a beaucoup de questions possibles autour de ce développement ! Les points (∗), (‡) et (§) peuvent être incorporés ou ajoutés à la fin si vous déroulez le développement trop vite. Cependant, il est bienvenu de prendre le temps d'expliquer le déroulement de la preuve, et exhiber vos qualités pédagogiques !

(♤) : La trigonalisabilité de u est capitale ! En effet, une rotation de $\mathbb{R}^2$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (donc vérifie l'égalité des noyaux), mais n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- Cette démonstration est une application de nombreuses notions et théorèmes : décompositions de DUNFORD, de JORDAN des nilpotents, codiagonalisation, endomorphismes induits sur un sous-espace stable...

⚠ En pratique, ce critère n'est pas très facile à utiliser, mais donne une méthode numérique pour déterminer si une matrice est diagonalisable : en effet, il suffit de déterminer la matrice de ad_u dans une base quelconque, calculer le carré de celle-ci et déterminer les noyaux de ces matrices (pivot de GAUSS...) ($O((n^2)^3)$ opérations) avec le critère classique "u est diagonalisable $\iff$ les multiplicités algébriques et géométriques de ses valeurs propres coincident", il faudrait trouver les valeurs propres... et là ça se corse. On pourrait aussi vérifier que son polynôme minimal est scindé à racines simples... plus facile à dire qu'à faire.

- Le *Carnet de voyage en Algèbre* (Philippe Caldero, Marie Perronier - p93) donne une autre preuve, plus orientée formes quadratiques, avec la forme trace.

- Les candidat.e.s pourront méditer sur le diagramme plus général ci-contre, où K est un corps quelconque et $u^{(K)}$ désigne u vu comme endomorphisme du $\overline{K}$-espace vectoriel E (avec $\overline{K}$ une clôture algébrique de K).

$$
\begin{array}{ccc}
u \text{ diag.} & \iff & \mathrm{ad}_u \text{ diag.} \\
\Downarrow \ \Uparrow & \text{si } \pi_u \text{ est scindé} \to \text{OK si } K \text{ alg. clos} & \Uparrow \ \Downarrow \\
u^{(K)} \text{ diag.} & \iff & \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u)=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2) \\
\Downarrow \ \Uparrow & \text{si } \pi_u \text{ est séparable} \to \text{OK si } K \text{ est parfait} & \Uparrow \ \Downarrow \\
u \text{ semi-simple} & \iff & \mathrm{ad}_u \text{ semi-simple}
\end{array}
$$