Rudin (p225)

THÉORÈME DE FOURIER – PLANCHEREL

201, 208, 234, 250

Convention pour la transformation de FOURIER : $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi x t}\, dt$.

Thm (de PLANCHEREL) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. En particulier, $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})] \subseteq L^2(\mathbb{R})$, et cette partie est dense.

Cor : $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

Preuve du Thm : ▸ Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Posons $\tilde{f} = \overline{\check{f}} : x \longmapsto \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$ qui est bien définie et dans L^1 car $f \in L^1$ et $\tilde{f} \in L^1$. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \tilde{f}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\, \overline{f(y)}\, dy = \langle f \mid f_{-x} \rangle_{L^2}$ où $f_{-x} : y \longmapsto f(y-(-x)) = f(x+y)$.

Par continuité de $\langle f \mid \cdot \rangle_{L^2}$ et de la translation $x \longmapsto f_{-x}$ sur L^2, g est continue sur $\mathbb{R}$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_2^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(x) = \widehat{f * \tilde{f}}(x) = \hat{f}(x)\, \hat{\tilde{f}}(x) = \hat{f}(x)\, \widehat{\left(\overline{\check{f}}\right)}(x) = \hat{f}(x)\, \overline{\hat{f}(x)} = |\hat{f}(x)|^2$ (NB : $\widehat{\left(\overline{\check{f}}\right)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, \overline{f(-t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \overline{f(t)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)\, dt} = \overline{\hat{f}(x)}$.)

Pour $\lambda > 0$, posons $h_\lambda : x \longmapsto \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$. Pour tout $\lambda > 0$, $h_\lambda \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda = 1$ et $\forall \delta > 0$, $\int_{|x|>\delta} h_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$, donc $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ est une approximation de l'unité. Soit $\lambda > 0$. Posons $H_\lambda : x \longmapsto e^{-\lambda|x|}$. Pour tous $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(t)\, e^{2i\pi x t}\, dt$: en effet, $\hat{H_\lambda}(x) = h_\lambda(x)$ et $\hat{H_\lambda} \in L^1$, le résultat vient donc de la formule d'inversion de FOURIER (pour des fonctions continues). De là, d'après le théorème de FUBINI,

$$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(-t)\, h_\lambda(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(-t) \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x)\, e^{2i\pi x t}\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} g(-t)\, e^{2i\pi x t}\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x) \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-2i\pi x t}\, dt\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

Or $g * h_\lambda(0) \longrightarrow g(0) = \|f\|_2^2$ et $\int_{\mathbb{R}} H_\lambda(x)\, \hat{g}(x)\, dx \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \int_{\mathbb{R}} \hat{g} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|_2^2$: en effet, pour le premier, cela vient du fait que $(h_\lambda)_{\lambda>0}$ est une approximation de l'unité et g est continue et bornée (annexe). Pour le second, $(H_\lambda)_{\lambda>0}$ tend ponctuellement en croissant vers 1 quand $\lambda \to 0$, donc cela découle du théorème de convergence monotone. Finalement, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ et $\hat{f} \in L^2$.

▸ Posons $Y = \mathcal{F}[L^1 \cap L^2] \subseteq L^2$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons que pour tout $\lambda > 0$, $x \longmapsto h_\lambda(\alpha - x) = e^{2i\pi\alpha x}\, \hat{H_\lambda}(x) \in Y$. De là, $\forall f \in Y^\perp$, $0 = \langle h_\lambda(\alpha - \cdot) \mid f \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha - t)\, \overline{f(t)}\, dt = h_\lambda * \bar{f}(\alpha)$, mais $\|h_\lambda * \bar{f} - \bar{f}\|_2 \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$ donc $\|f\|_2 = \|\bar{f}\|_2 = \dots$ $= \lim_{\lambda \to 0} \|h_\lambda * f\|_2 = 0$. Ainsi, $f = 0$ (dans L^2), donc $Y^\perp = \{0\}$, donc Y est une partie dense de (l'espace de Hilbert) L^2.

Preuve du Cor : ▸ Pour tout $f \in L^2$, $\|f - f \mathbb{1}_{[-n,n]}\|_2^2 = \int_{|x|>n} |f(x)|^2\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $(f \mathbb{1}_{[-n,n]})_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}$, donc $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2. Par ailleurs, $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ est continu (d'après le théorème de FOURIER-PLANCHEREL ; c'est même une isométrie), et L^2 est complet, donc d'après le théorème de prolongement des opérateurs, $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en un opérateur $\mathcal{F}_2$ sur L^2. Reste à montrer que $\mathcal{F}_2$ est une isométrie bijective.

▸ Soit $f \in L^2$. Par densité, il existe $(f_n)_n \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_2} f$. En particulier, $(f_n)_n$ est de Cauchy, mais $\|f_n\|_2 = \|\hat{f_n}\|_2$ donc $(\hat{f_n})_n$ est de Cauchy, donc d'après le théorème de prolongement des opérateurs, $\mathcal{F}_2[f] = \lim_{n \to +\infty} \hat{f_n}$, et donc $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}_2[f]\|_2$. Comme $\mathcal{F}_2$ est une isométrie linéaire, on en déduit que $\mathcal{F}_2$ est injectif.

▸ Montrons que $\mathcal{F}_2[L^2] =: H = L^2$. Déjà, H est fermé comme image d'un fermé par une isométrie (en effet, soit $(f_n)_n \in (L^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $(\mathcal{F}_2[f_n])_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge vers $g \in L^2$. En particulier, $(\mathcal{F}_2[f_n])_n$ est de Cauchy, et $\mathcal{F}_2$ est une isométrie donc $(f_n)_n$ est de Cauchy dans L^2. Ce dernier étant complet, $(f_n)_n$ converge, disons vers $f \in L^2$. Par

continuité de $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}[f_n] \longrightarrow \mathcal{F}[f] = g \in L^2$.) Par ailleurs, H est dense dans L^2 : en effet, soit $g \in H^\perp$.
D'après le théorème de PLANCHEREL, $\mathcal{F}[L^1 \cap L^2]$ est dense dans L^2, donc il existe $(f_n)_n \in (L^1 \cap L^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{F}_2[f_n] = \hat{f}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_2} g$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\hat{f}_n \in H$, donc $\langle \hat{f}_n | g \rangle_{L^2} = 0$ donc par continuité de $\langle \cdot | g \rangle_{L^2}$, on a $\langle g | g \rangle_{L^2} = 0$, donc $g = 0$. Ainsi, $H^\perp = \{0\}$, donc H est dense. ■

ANNEXE : Convergence uniforme de $h_\lambda * g$: pour se ramener à une suite, posons $(h_n)_{n\geq 1} := (h_{1/n})_{n \geq 1}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g \in C_b^0 \cap L^1$, g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc il existe $\delta > 0$ (indépendant de x) tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| = |(x-t) - x| < \delta \Rightarrow |g(x-t) - g(x)| < \varepsilon$. Comme $\int_{|t|\geq\delta} h_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de δ, donc pas de x) tel que $\forall n \geq N$, $\int_{|t|\geq\delta} h_n(t)\,dt \leq \varepsilon$. Soit $n \geq N$.

$$|h_n * g(x) - g(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} h_n(t) g(x-t)\,dt - g(x)\int_{\mathbb{R}} h_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} h_n(t)\,(g(x-t) - g(x))\,dt\right|$$

$$\leq \int_{|t|<\delta} h_n(t) \underbrace{|g(x-t) - g(x)|}_{\leq \varepsilon} dt + \int_{|t|\geq\delta} h_n(t) \cdot \underbrace{|g(x-t) - g(x)|}_{\leq 2\|g\|_\infty} dt < \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h_n(t)\,dt}_{=1} + 2\|g\|_\infty \underbrace{\int_{|t|\geq\delta} h_n(t)\,dt}_{\leq \varepsilon}$$

$$< \varepsilon(2\|g\|_\infty + 1)$$

Et donc $h_n * g \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ uniformément sur $\mathbb{R}$. ■

(REMARQUE 1 : l'hypothèse $g \in L^\infty$ suffit pour la convergence ponctuelle (démonstration par convergence dominée, RUDIN 9.9))
(REMARQUE 2 : pour montrer que $\|h_\lambda * f - f\|_2 \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$ plus loin dans la démonstration, l'idée de la preuve est relativement similaire, mais il faut admettre la continuité de la translation $x \mapsto g(x-t)$, qui se montre par densité des fonctions $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans L^2.)

COMMENTAIRES :

- Avec la convention $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)\,dt$, on perd le caractère isométrique de $\mathcal{F}_2$, car dans ce cas, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$ (ou, de manière équivalente, $\forall (f,g) \in (L^1 \cap L^2)^2$, $\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f | g \rangle_{L^2}$).
- Si le temps vous manque, vous pouvez sauter les parties en bleu.
- Le nom "théorème de prolongement des opérateurs" n'est peut-être pas conventionnel. Voici son énoncé :

Thm (de prolongement des opérateurs)

> Soient F un espace de Banach, E un espace vectoriel normé, D un sous-espace vectoriel dense de E, et $T : D \to F$ un opérateur (i.e. une application linéaire continue).
> Il existe un unique opérateur $\tilde{T} : E \longrightarrow F$ qui prolonge T. De plus, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

C'est un corollaire du théorème de prolongement des applications uniformément continues. L'idée de la démonstration est la suivante : pour tout $x \in E$, il existe $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans E. Comme T est borné, $(T(x_n))_n$ est de Cauchy dans F, donc converge : on pose $\tilde{T}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n)$ (dans F). On montre ensuite que la valeur de $\tilde{T}(x)$ ne dépend pas de x.
C'est pour cette raison qu'on se soucie des suites de Cauchy dans la démonstration du Cor.