Oraux X-ENS
Algèbre 1 (p229)

102
144
~~181~~ bof

THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS & UNE APPLICATION

<u>Thm</u> (de GAUSS-LUCAS) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2. On a $Z_{\mathbb{C}}(P') \subset \mathrm{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$ où, si $Z_{\mathbb{C}}(P) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors : $\mathrm{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P)) = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_k \ : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in [0,1]^r, \ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = 1 \right\}$.

<u>Appli</u> : 7 est le plus grand entier $n \geq 2$ tel que : $Z_{\mathbb{C}}((X+1)^n - X^n - 1) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup \{0\}$.

<u>Preuve du thm</u> : Écrivons $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Classiquement, $P' = \sum_{k=1}^{r} m_k (X-\alpha_k)^{m_k - 1} \prod_{\ell \neq k} (X - \alpha_\ell)^{m_\ell}$ et $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{X - \alpha_k}$. Soit z une racine de P'. Si $z \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, alors il n'y a rien à faire : supposons que $z \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$.

On a alors $0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z - \alpha_k} \times \frac{\overline{z - \alpha_k}}{\overline{z - \alpha_k}} = \sum_{k=1}^{r} m_k \frac{\overline{z - \alpha_k}}{|z - \alpha_k|^2}$ donc $0 = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2} (z - \alpha_k)$. Ainsi,

$$z = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \alpha_k \in \mathrm{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P)) \qquad \text{où} \qquad \lambda_k = \frac{m_k}{|z - \alpha_k|^2} \left(\sum_{\ell=1}^{r} \frac{m_\ell}{|z - \alpha_\ell|^2} \right)^{-1} \in [0,1]$$

■

<u>Application</u> : Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$. Remarquons que $P_2 = 2X$. Prenons $n \geq 3$. On a alors $P_n' = n(X+1)^{n-1} - nX^{n-1}$. Remarquons que $P_n'(0) \neq 0$. De là, considérant une racine z de P_n' qui donc est non nulle, on a $P_n'(z) = 0$ donc $\left(\frac{z+1}{z}\right)^{n-1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$. Comme $z \neq z+1$, on a $k \neq 0$.

En résolvant l'équation $\frac{z_k + 1}{z_k} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right)$ pour z_k on montre que (puisque $k \neq 0$) :

$$z_k = \left[\exp\left(\frac{2ik\pi}{n-1}\right) - 1 \right]^{-1} = \frac{\exp\left(-\frac{ik\pi}{n-1}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right) - \exp\left(\frac{ik\pi}{n-1}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{ik\pi}{n-1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)}$$

et $Z_{\mathbb{C}}(P_n') \subseteq \{z_k : 1 \leq k \leq n-2\}$. Les implications précédentes étant des équivalences, cette inclusion est une égalité. Si $Z_{\mathbb{C}}(P_n) \subseteq S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, alors d'après le théorème de GAUSS-LUCAS, $Z_{\mathbb{C}}(P_n') \subseteq B(0,1)$. Si $n \geq 8$, alors $|z_1| = \left|2 \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right)\right|^{-1} > \left|2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|^{-1} = 1$, ce qui n'est pas. Ainsi $n \leq 7$.

Vérifions que P_7 convient : comme $P_7(0) = P_7(-1) = 0$, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{7}\left[(X+1)^7 - X^7 - 1\right] = X^6 + 3X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & X(X+1) = X^2 + X \\
\hline
2X^5 + 5X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \\
3X^4 + 5X^3 + 3X^2 + X & \\
2X^3 + 3X^2 + X & \\
X^2 + X &
\end{array}$$

(⚠ Erreur de signe dans le FGN !)

Donc $P_7 = 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)X^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right)$
$= 7X(X+1)X^2\left(\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 - 2 + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right) = 7X(X+1)X^2\left(X + \frac{1}{X} + 1\right)^2 = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)$. Soit z une racine de P_7 distincte de 0 et -1. Nécessairement, $z^2 + z + 1 = 0$, donc $z \in \{j, j^2\}$. Finalement,

$$Z_{\mathbb{C}}(P_7) = \{0, -1, j, j^2\} \subseteq S^1 \cup \{0\}$$

■

⚠ <u>Remarque</u> (à savoir absolument en cas de questions) : cette dernière étape peut être court-circuitée en connaissant le résultat : on vérifie que $0, -1, j, j^2$ sont racines de P_7 (on en a trouvé 4 sur 7), et j et j^2 sont racines de P_7' (elles sont donc au moins doubles dans P_7 : on en a trouvé 6 sur 6). De là, on a directement le résultat et la factorisation ci-dessus.