Th de Lévy et th central limite

Leçons : 250, 261, 262.

Énoncés :

- th 1 : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des va $\mathbb{R}$. On a $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ ssi $\phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} \phi_X$.
- lemme : Si $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ dans $\mathbb{C}$, $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z$.
- th 2 : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va $\mathbb{R}$ iid L^2. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = E[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.

On a alors $\frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$.

⊛ **Th 1.**

- Par déf, si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$ alors $\forall f \in \mathcal{C}_b^0$, $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$. En particulier, pour $t\in\mathbb{R}$, $(x \mapsto e^{itx}) \in \mathcal{C}_b^0$ et on obtient $\phi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[e^{itX}] = \phi_X(t)$.
- On suppose réciproquement $\phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} \phi_X$. D'abord considérons $f \in \mathcal{C}_c^\infty$. $f\in\mathcal{S}$ donc d'après le th d'inversion sur cet espace, $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{itx}\, dt$ pour $x\in\mathbb{R}$. Alors $E[f(X_n)] = E\left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{itX_n}\, dt\right] = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, E[e^{itX_n}]\, dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\, \phi_{X_n}$ grâce au th de Fubini-Lebesgue (on remarque d'abord que $E\left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)\, e^{itX_n}|\, dt\right] = E\left[\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}|\right] = \int_{\mathbb{R}}|\hat{f}| < \infty$).
Mais alors $\hat{f}\phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} \hat{f}\phi_X$ par hyp, et $|\hat{f}\phi_{X_n}| \leq |\hat{f}|$ avec $|\hat{f}|$ intégrable : le TCD s'applique, donnant $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\phi_X$. Comme le calcul précédent s'applique autant à X qu'à X_n, on obtient $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$.
- Il est classique que dans la déf de la CV en loi, il est équivalent de remplacer $\mathcal{C}_b^0$ par $\mathcal{C}_c^0$. Autre fait classique, $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0$: après avoir fixé un $\varepsilon>0$, on peut donc prendre $g\in\mathcal{C}_c^\infty$ tq $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon/3$.
On prend donc $f\in\mathcal{C}_c^0$ et on mq $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$.
Soit de plus, d'après ce qui précède, $N\in\mathbb{N}$ tq si $n\geq N$, $|E[g(X_n)] - E[g(X)]| \leq \varepsilon/3$. Ainsi pour $n\geq N$: $|E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq E[|f(X_n)-g(X_n)|] + |E[g(X_n)] - E[g(X)]| + E[|g(X)-f(X)|]$
$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. On a mq $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$ pour $f\in\mathcal{C}_c^0$, et donc que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$. □

⊛ **Lemme.**

On note Log la dét principale du logarithme complexe. Puisque $\frac{z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\frac{z_n}{n} \in D(0,1)$ apcr et :
$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp \mathrm{Log}\left(\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n\right) = \exp\left(n\, \mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{z_n}{n} + o\left(\frac{z_n}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} \exp(z_n + o(z_n))$
$\underset{n\to\infty}{=} \exp(z_n + o(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z$. □

⊛ Th 2.

- On se ramène au cas $\begin{cases} m=0 \\ \sigma=1 \end{cases}$. En effet si le TCL est montré dans ce cas, on pose $Y_n = \dfrac{X_n - m}{\sigma}$: le th s'applique à $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \dfrac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.
- Traitons le cas $\begin{cases} m=0 \\ \sigma=1 \end{cases}$; on va utiliser le th de Lévy (on rappelle que la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$ est $t \mapsto e^{-t^2/2}$). Notons $X = X_1$. Pour $t\in\mathbb{R}$, par indépendance : $\phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \phi_{S_n}(t/\sqrt{n}) = \phi_X(t/\sqrt{n})^n$. Puisque X est L^2, ϕ_X est $\mathcal{C}^2$ avec $\phi_X'(0) = E[iX] = 0$ et $\phi_X''(0) = E[(iX)^2] = -E[X^2] = -\operatorname{Var} X = -1$. On a donc le DL en 0

$\phi_X(t/\sqrt{n}) \underset{n\to\infty}{=} 1 - \dfrac{(t/\sqrt{n})^2}{2} + o\left((t/\sqrt{n})^2\right) \underset{n\to\infty}{=} 1 - \dfrac{t^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. D'après le lemme, $\phi_X(t/\sqrt{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/2}$. C'est ce que l'on souhaitait. □

Complément 1 : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X$ ssi $\forall f \in \mathcal{C}_c^0$, $E[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[f(X)]$.

Preuve. Le sens direct est trivial ; supposons $\int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu$ pour toute $g \in \mathcal{C}_c^0$ (en notant $\mu_n = P_{X_n}$, $\mu = P_X$). Soient $f \in \mathcal{C}_b^0$ (on peut supp $f \neq 0$) et $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 0$ on déf $g_n \in \mathcal{C}_c^0$ par $g_n(t) = 0$ si $|t| \geq n+1$, $g_n(t) = 1$ si $|t| \leq n$, g_n affine sur $[-n-1; -n]$ et sur $[n; n+1]$. Alors $\int_{\mathbb{R}} |f - g_n f|\, d\mu$ $\leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} (1-g_n)\, d\mu = \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu\right)$, de m̂ avec μ_n. Par le TCM, $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$: soit $n \geq 0$ tq $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu \geq 1 - \dfrac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$. Alors $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu$ par hyp : soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tq si $m \geq N_1$, $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu_m \geq 1 - \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$.

De plus encore par hyp (et car $g_n f \in \mathcal{C}_c^0$), $\int_{\mathbb{R}} g_n f\, d\mu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g_n f\, d\mu$: soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tq si $m \geq N_2$, l'écart soit $\leq \dfrac{\varepsilon}{4}$. Finalement, pour $m \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_m - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - g_n f|\, d\mu_m + \left|\int_{\mathbb{R}} g_n f\, d\mu_m - \int_{\mathbb{R}} g_n f\, d\mu\right| + \int_{\mathbb{R}} |g_n f - f|\, d\mu$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{4} + \|f\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$ □

Complément 2 : Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$. Plus généralement si $z \in \mathbb{C}$,
$$E[e^{zX}] = e^{z^2/2}.$$

Preuve. $z \mapsto E[e^{zX}]$ et $z \mapsto e^{z^2/2}$ sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ (par th d'holomorphie sous l'intégrale pour la première). Par prolongement analytique on se contente de montrer l'égalité pour $z \in \mathbb{R}$: $E[e^{zX}] = \int e^{zx}\, dP_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{zx - x^2/2}\, dx$ $= \dfrac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-(x-z)^2/2}\, dx = \dfrac{e^{z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-y^2/2}\, dy = e^{z^2/2}$ (où l'on utilise $-(x-z)^2/2 = -x^2/2 + xz - z^2/2$). □

Complément 3 : $p \geq 1$, X une va $\mathbb{R}$ L^p. Pour $k \leq p$ entier, ϕ_X est $\mathcal{C}^k$ avec
$$\phi_X^{(k)}(t) = E\left[(iX)^k e^{itX}\right]$$ pour $t \in \mathbb{R}$. En particulier $\phi_X^{(k)}(0) = E[(iX)^k]$.

Preuve. Il s'agit simplement de dériver sous l'intégrale : $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dP_X(x)$, et $t \mapsto e^{itx}$ a pour dérivée k^e $t \mapsto (ix)^k e^{itx}$. Puisque X est L^k, $x \mapsto x^k$ et donc $x \mapsto (ix)^k e^{itx}$ sont P_X-intégrables. On obtient bien ϕ_X $\mathcal{C}^k$ avec $\phi_X^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} dP_X(x)$ $= E\left[(iX)^k e^{itX}\right]$. $\square$

Réf : • QZ : p 508 (cpl 2), p 536 (th 1), p 540 (th 2).

• Garett, Kurtzmann : p 245 (cpl 3), p 303 (cpl 1).

• Briane, Pagès : p 275 (supplément sur la régularisation par convolution).

↳ Rappel : $\mathcal{C}_b^0$ est l'ens des fonctions $\mathcal{C}^0$ bornées, $\mathcal{C}_0^0$ celui des fonctions $\mathcal{C}^0$ de limite nulle en $\pm\infty$, $\mathcal{C}_c^0$ celui des fonctions $\mathcal{C}^0$ à support compact. On note $\mathcal{C}_b^0 = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, etc.

↳ Convention pour la TF : $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt} dx$. Attention de plus, la fonction caractéristique est la TF inverse (de la densité lorsqu'elle existe).

↳ Preuve du th 1 : dans QZ il est utilisé que $\mathcal{F}(L^1)$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0$, ce qui n'est pas clair. On utilise plutôt que $\mathcal{C}_c^\infty$ l'est dans $\mathcal{C}_c^0$ (et que $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{F}(L^1)$).

↳ La densité de $\mathcal{C}_c^\infty$ dans $\mathcal{C}_c^0$ se montre par convolution par une suite régularisante (cad une approx de l'unité $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in \mathcal{C}_c^\infty$). Voir Briane, Pagès pages 273-275.

↳ Preuve du lemme : dans QZ le recours à Log est évité, ce qui complique les choses. Ici on utilise plutôt le DSE de Log : si $z \in D(0,1)$, $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$. En particulier $\mathrm{Log}(1+z) \underset{z\to 0}{=} z + o(z)$.

↳ Attention on ne peut pas écrire $\mathrm{Log}(z^n) = n\,\mathrm{Log}\, z$ pour $z \notin \mathbb{R}_+^*$: il faut composer par exp pour rendre cela vrai.

↳ Mettre les trois compléments dans le plan (on les utilise dans le dvt).

↳ Si trop long : garder pour la fin le lemme et le "on se ramène à $\begin{cases} m=0 \\ \sigma=1 \end{cases}$" du th 2, voire ne pas les faire.

↳ Une autre preuve classique du th de Lévy utilise la notion de tension. On peut la trouver dans Garet-Kurtzmann, page 306.

↳ Le th de Lévy admet une forme plus forte (parfois appelée th de continuité de Lévy) : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des va $\mathbb{R}$ tq $\Phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{CVS} \Psi$ avec $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue en 0 ; il existe une va $\mathbb{R}$ X tq $\Psi = \Phi_X$ (en particulier $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} X$). Ce th est dans QZ (avec l'hyp plus forte Ψ continue) et dans Garet-Kurtzmann.

↳ La LGN forte assure, sous les hypothèses du TCL, que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} m$. Intuitivement, le TCL donne la "vitesse" à laquelle cette convergence a lieu : il dit que pour n grand, une bonne approximation de la loi de $\frac{S_n}{n}$ est $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. En particulier la variance de cette gaussienne décroît en $\frac{1}{n}$.

↳ Le TCL signifie que lorsque l'on effectue un grand nombre de fois la même expérience aléatoire, la courbe des fréquences d'apparition tend vers une gaussienne (en lien avec la rq précédente). Cela explique l'apparition naturelle de la loi normale dans des pb de statistiques ou de physique (plus généralement, dans la nature).