Expression de $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Leçons : 243, 246.

Énoncés : • prop : la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli, définie par le DSE

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \text{, vérifie } \begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \geq 2, \ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \end{cases} \text{ ; en particulier}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathbb{Q}$.

• th : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = \dfrac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2\cdot(2k)!} B_{2k} \in \pi^{2k}\mathbb{Q}$.

⊛ Prop.

Écrivons, au voisinage de 0 : $z = \dfrac{z}{e^z-1}(e^z-1) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{B_k}{k!(n-k)!}\right) z^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} B_k\right)\dfrac{z^n}{n!}$ (on s'arrête à $n-1$ car on doit avoir $n-k \geq 1$). Il n'y a plus qu'à identifier les coefficients pour $n \geq 2$.

□

⊛ Th.

• Soit $z \in \mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$. On définit $\varphi_z : \begin{cases}]-\pi;\pi] \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \exp\left(\frac{xz}{2\pi}\right)\end{cases}$ et on la prolonge de façon 2π-périodique à $\mathbb{R}$: φ_z est $\mathcal{C}^1$ pm sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coef de Fourier pour $n \in \mathbb{Z}$:

$c_n(\varphi_z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{xz}{2\pi}\right) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)x\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)^{-1}\left[\exp\left(\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)x\right)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$

$= (z-2i\pi n)^{-1}\left(e^{z/2}e^{-i\pi n} - e^{-z/2}e^{i\pi n}\right) = \left(e^{z/2}-e^{-z/2}\right)\dfrac{(-1)^n}{z-2i\pi n}$.

Comme φ_z est $\mathcal{C}^1$ pm le th de Dirichlet s'applique : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left(e^{z/2}-e^{-z/2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z-2i\pi n}e^{inx} = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-}\varphi_z(y) + \lim_{y\to x^+}\varphi_z(y)\right).$$

• Posons $f : \begin{cases}\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z}{e^z-1}\end{cases}$: on veut faire apparaître $f(z)$ dans l'expression ci-dessus.

On l'évalue en $x = \pi$: le membre de droite donne $\frac{1}{2}\left(\varphi_z(\pi) + \lim_{y\to -\pi^+}\varphi_z(y)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\exp\left(\frac{\pi z}{2\pi}\right) + \exp\left(\frac{-\pi z}{2\pi}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z/2}+e^{-z/2}\right)$. On obtient donc $\dfrac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2\left(e^{z/2}-e^{-z/2}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{i\pi n}}{z-2i\pi n}$.

On réécrit le membre de droite : $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{z-2i\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{z+2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2} = \dfrac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z-2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z+2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2}$

$= \dfrac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z}{z^2+4\pi^2n^2}$.

Puis celui de gauche : $\dfrac{e^z+1}{2(e^z-1)} = \dfrac{e^z-1}{2(e^z-1)} + \dfrac{2}{2(e^z-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f(z)}{z}$.

Tout ceci donne : $f(z) = 1 - \dfrac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2}$.

- Il reste à obtenir un DSE à partir de ceci.

Si $z \in D(0,2\pi) \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|z| < 2\pi n$ et $\left|\frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right| < 1$:

$$\frac{z^2}{z^2+4\pi^2n^2} = \frac{1}{4\pi^2n^2}\cdot\frac{z^2}{\frac{z^2}{4\pi^2n^2}+1} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)} = \frac{z^2}{4\pi^2n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}.$$

On note $u_{n,k} = (-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$ pour $n,k \in \mathbb{N}^*$. Pour intervertir les sommes on montre que $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|u_{n,k}| < \infty$. En effet $\sum_{k=1}^{\infty}|u_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{|z|^2}{4\pi^2n^2}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2n^2-|z|^2} \sim \frac{|z|^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$,

d'où la convergence. Finalement, grâce au th de Fubini-Lebesgue :

$$b(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^{2k}}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}z^{2k}.$$

On en déduit, par identification des coefficients, $\frac{B_{2k}}{(2k)!} = 2\frac{(-1)^{k+1}\zeta(2k)}{(2\pi)^{2k}}$, c.à.d $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$. $\square$

<u>Réf</u>: FGN - Analyse 2 : 4.18, p 308.

↳ Les premières valeurs sont donc : $k=1$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$; $k=2$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

↳ L'identification des coefficients à la fin montre aussi que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$. Cela s'obtient aussi facilement en remarquant que $z \mapsto b(z) + \frac{z}{2}$ est paire (en effet $\frac{-z}{e^{-z}-1} - \frac{z}{2} = -z\left(\frac{1}{e^{-z}-1}+1\right) + \frac{z}{2}$ et $\frac{1}{e^{-z}-1} + 1 = \frac{1+e^{-z}-1}{e^{-z}-1} = \frac{e^{-z}}{e^{-z}-1} = \frac{1}{1-e^{z}}$).

↳ Très peu de choses sont connues pour $\zeta(2k+1)$, $k \geq 1$. Parmi les seuls résultats : $\zeta(3)$ est irrationnel, et une infinité sont irrationnels.

↳ Autre formule sur les valeurs entières de ζ : si $k \in \mathbb{N}$, $\zeta(-k) = \frac{(-1)^k}{k+1}B_{k+1} \in \mathbb{Q}$.