Formule des compléments

Leçons : 235, 236, 239, 265, 267.

<u>Enoncé :</u> pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

<u>Preuve.</u>

- $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$; par prolongement analytique il suffit de montrer la formule pour $z \in]0;1[$. Fixons donc $0 < z < 1$.

- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \left(\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^\infty s^{-z} e^{-s} ds\right) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} d(t,s)$ par le th de Fubini-Tonelli.

  On considère le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \to (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (t,s) \mapsto (t+s, \frac{t}{s}) \end{cases}$, et on fait le chgt de var

  $(u,v) = \phi(t,s) = (t+s, \frac{t}{s})$. On a $t = sv$ donc $u = sv + s = s(1+v)$: $s = \frac{u}{1+v}$. De plus $t = \frac{uv}{1+v}$.

  Donc $(t,s) = \phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$. On a $\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} t^{z-1} s^{-z} e^{-(t+s)} d(t,s) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1} \left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z} e^{-u} |\mathrm{Jac}_{(u,v)} \phi^{-1}| \, d(u,v)$.

  Calculons : $\mathrm{Jac}_{(t,s)}\phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{s} & -\frac{t}{s^2} \end{vmatrix} = -\frac{t}{s^2} - \frac{1}{s} = -\frac{t+s}{s^2}$. Alors $\mathrm{Jac}_{(u,v)}\phi^{-1} = \left(\mathrm{Jac}_{\phi^{-1}(u,v)}\phi\right)^{-1}$

  $= \left(-\frac{u}{\left(\frac{u}{1+v}\right)^2}\right)^{-1} = \left(-\frac{(1+v)^2}{u}\right)^{-1} = -\frac{u}{(1+v)^2}$.

  Donc $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{uv}{1+v}\right)^{z-1}\left(\frac{u}{1+v}\right)^{-z} e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2} d(u,v)$

  $$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^{z-1} \left(\frac{u}{1+v}\right)^{-1} e^{-u} \frac{u}{(1+v)^2} d(u,v)$$

  $$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-u} \frac{v^{z-1}}{1+v} d(u,v)$$

  $$= \left(\int_0^\infty e^{-u} du\right)\left(\int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv\right) \quad \text{par le th de Fubini - Tonelli}$$

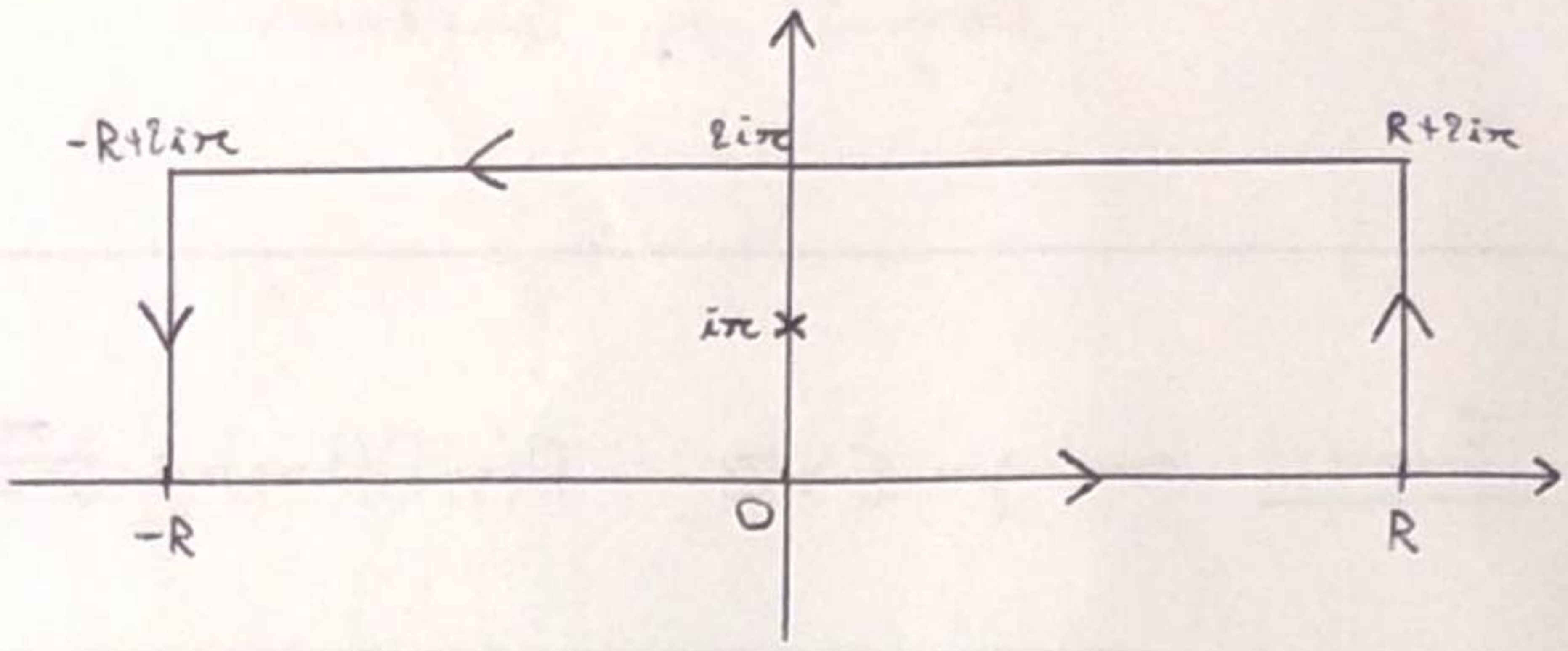
  $$= \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv \quad \text{car } \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

  $$= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{w(z-1)}}{1+e^w} \cdot e^w dw \quad \text{par le chgt de var } w = \ln v \text{, càd } v = e^w$$

  $$= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{wz}}{1+e^w} dw.$$

- Nous allons utiliser le th des résidus pour calculer cette dernière intégrale.

  On pose $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus i\pi(1+2\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} \\ w \mapsto \frac{e^{wz}}{1+e^w} \end{cases}$: c'est une fonction holomorphe. On cherche à calculer $\int_{-\infty}^\infty f(w) dw$. Pour $R > 0$ on définit le chemin γ_R comme la concaténation des segments $[-R;R]$, $[R;R+2i\pi]$, $[R+2i\pi;-R+2i\pi]$, $[-R+2i\pi,-R]$.



L'unique pôle de f à l'intérieur de ce contour γ_R (cad dans le rectangle de sommets $-R$, R, $R+2i\pi$, $-R+2i\pi$) est $i\pi$. Pour $w \in \mathbb{C} \setminus i\pi(1+2\mathbb{Z})$:

$$(w-i\pi)f(w) = (w-i\pi)\frac{e^{wz}}{1+e^{w}} = e^{wz}\frac{w-i\pi}{1-e^{w-i\pi}} \underset{w\to i\pi}{=} e^{wz}\frac{w-i\pi}{1-1-(w-i\pi)+o(w-i\pi)} \underset{w\to i\pi}{=} e^{wz}\frac{1}{-1+o(1)}$$

donc $(w-i\pi)f(w) \underset{w\to i\pi}{\sim} -e^{wz} \xrightarrow[w\to i\pi]{} -e^{i\pi z}$. Ceci montre que $i\pi$ est un pôle simple de f et que $\mathrm{Res}_f(i\pi) = -e^{i\pi z}$. Alors d'après le th des résidus, $\int_{\gamma_R} f(w)\,dw = 2i\pi\,\mathrm{Ind}_{\gamma_R}(i\pi)\cdot\mathrm{Res}_f(i\pi)$ $= -2i\pi e^{i\pi z}$.

Déduisons-en $\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(w)\,dw$. D'abord $\left|\int_R^{R+2i\pi} f(w)\,dw\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(R+iy)\,i\,dy\right|$ $\leq \int_0^{2\pi}|f(R+iy)|\,dy$. Or pour $0\leq y\leq 2\pi$, $|f(R+iy)| = \frac{|e^{(R+iy)z}|}{|1+e^{R+iy}|} \leq \frac{e^{Rz}}{||1|-|e^{R+iy}||} = \frac{e^{Rz}}{e^R-1}$.

Donc $\left|\int_R^{R+2i\pi} f(w)\,dw\right| \leq 2\pi\frac{e^{Rz}}{e^R-1} \underset{R\to\infty}{\sim} 2\pi e^{R(z-1)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ car $z-1<0$.

De même, $\left|\int_{-R+2i\pi}^{-R} f(w)\,dw\right| = \left|-\int_0^{2\pi} f(-R+iy)\,i\,dy\right| \leq \int_0^{2\pi}|f(-R+iy)|\,dy$, avec $|f(R+iy)| \leq \frac{e^{-Rz}}{1-e^{-R}}$

d'où $\left|\int_{-R+2i\pi}^{-R} f(w)\,dw\right| \leq 2\pi\frac{e^{-Rz}}{1-e^{-R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ car $z>0$.

Ensuite, $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(w)\,dw = -\int_{-R}^{R} f(w+2i\pi)\,dw$, où $f(w+2i\pi) = \frac{e^{(w+2i\pi)z}}{1+e^{w+2i\pi}} = e^{2i\pi z}\cdot\frac{e^{w}}{1+e^{w}}$

$= e^{2i\pi z}f(w)$: ainsi $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(w)\,dw = -e^{2i\pi z}\int_{-R}^{R} f(w)\,dw$.

Finalement : $-2i\pi e^{i\pi z} = \int_{\gamma_R} f(w)\,dw \underset{R\to\infty}{=} (1-e^{2i\pi z})\int_{-R}^{R} f(w)\,dw + o(1) \xrightarrow[R\to\infty]{} (1-e^{2i\pi z})\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw$

et $\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw = \frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1-e^{2i\pi z}} = \pi\frac{2i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Donc $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. $\square$

Réf : • Stein, Shakarchi – Complex analysis : p 79 (partie 2), p 164 (partie 1).
• Amar, Matheron – Analyse complexe : p 249 (partie 1).

↳ Dans Stein, Shakarchi la preuve est la même qu'ici (la justification du chgt de var de la partie 1 est toutefois éludée) ; c'est la version "rectangle" en ce qui concerne la partie 2. Dans Amar, Matheron la preuve de la partie 2 diffère : c'est la version "trou de serrure" (qui est plus technique, mais par ailleurs jolie).

↳ Long dv. Au tableau il ne faut pas préciser autant les détails au niveau du premier cht de var et de la majoration des intégrales sur les segments verticaux.

↳ Application : en évaluant en $1/2$ on obtient $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, or $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{x}e^{-x^2}\cdot 2x\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ par le cht de var $x=\sqrt{t}$ et car $x\mapsto e^{-x^2}$ est paire. C'est l'intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.