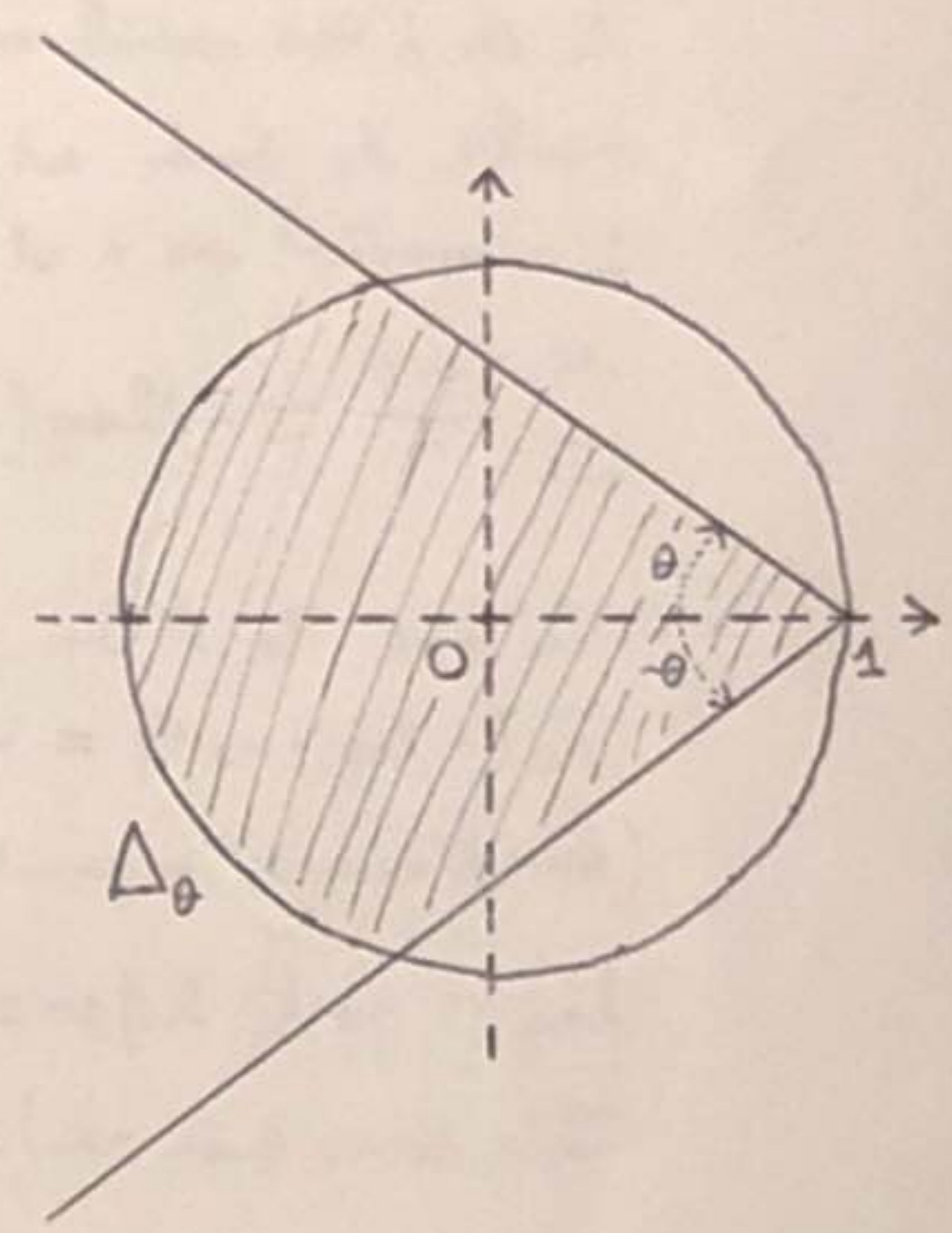
Th d'Abel angulaire

Leçons : 230, 235, 243.

Énoncés : • th : soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon CV 1. Pour $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ on note $\Delta_\theta = D(0,1) \cap \{1 - r e^{i\alpha} ; (r,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\theta;\theta]\}$. Si la série $\sum_n a_n$ converge, alors $f(z) \xrightarrow[z \in \Delta_\theta]{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

• application : en notant log la détermination principale du logarithme complexe : pour $\theta \in]0;2\pi[$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log(1-e^{i\theta}).$$
En particulier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$.

⊛ Th.



• Pour $N \in \mathbb{N}$ on note $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ le N^e reste de la série convergente $\sum_n a_n$.

Soient $z \in D(0,1)$ et $N \in \mathbb{N}$; on effectue une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1).
\end{aligned}$$

Puisque $R_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ le terme de droite tend vers 0 ; et $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $z \mapsto \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n$ a un rayon CV ≥ 1.

On passe donc à la limite : $f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$.

• Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ tq pour $n \geq N$, $|R_n| \leq \frac{\cos\theta}{4} \varepsilon$. Soit $z \in D(0,1)$.

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n z^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |R_n z^n| \right) \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\cos\theta}{4} \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \right)$$
$$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\cos\theta}{4} \varepsilon \cdot \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

On voudrait majorer le terme de droite. D'abord $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \leq 2 \frac{|z-1|}{1-|z|^2}$. Tq $z \in \Delta_\theta$: $z = 1 - re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in [-\theta;\theta]$. Alors $\bar{z} = 1 - re^{-i\alpha}$ et $|z|^2 = z\bar{z} = 1 - r(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + r^2 = 1 - 2r\cos(\alpha) + r^2 \leq 1 - 2r\cos(\theta) + r^2$.

Ainsi $\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq \frac{r}{2r\cos(\theta) - r^2} = \frac{1}{2\cos(\theta) - r}$. Si on prend $|z-1| \leq \cos(\theta)$, cad $r \leq \cos(\theta)$, on obtient

$$\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leq \frac{1}{2\cos(\theta) - \cos(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}.$$

Pour le terme de gauche on peut prendre $\eta > 0$ tq si $|z-1| \leq \eta$, $|z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour $z \in \Delta_\theta$ avec $|z-1| \leq \min(\cos\theta, \eta)$: $\left| B(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\cos\theta}{4} \varepsilon \cdot 2 \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Cela signifie que $B(z) \xrightarrow[z \in \Delta_\theta]{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

$\square$

⊛ Appli.

- Mq $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge. On utilise le critère d'Abel. En effet d'une part $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum_n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ converge absolument (car $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$) ; d'autre part $\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}\right)_{N \geq 1}$ est bornée, car $\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - e^{i\theta}$. Le critère s'applique et prouve la convergence.

- Pour $z \in D(0,1)$ on a $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, donc en appliquant en $e^{i\theta} z$: $\log(1 - e^{i\theta} z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} z^n$.
Le th d'Abel radial mq le membre de droite tend vers $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$ quand $z \to 1$ avec $0 < z < 1$. Or le membre de gauche est holomorphe donc continu en dehors de $e^{-i\theta}[1;\infty[$ (car $1 - e^{i\theta} z \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow e^{i\theta} z \in [1;\infty[$), et 1 n'appartient pas à cet ensemble car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $-\log(1 - e^{i\theta} z) \xrightarrow[0<z<1]{z \to 1} -\log(1 - e^{i\theta})$. Finalement :
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log(1 - e^{i\theta})$.

- Vu que Re et Im sont continues il suffit pour obtenir les deux autres formules de mq
$\mathrm{Re}(-\log(1 - e^{i\theta})) = -\ln\left(2 \sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $\mathrm{Im}(-\log(1 - e^{i\theta})) = \frac{\pi - \theta}{2}$. On utilise la formule $\log z = \ln|z| + i \,\mathrm{Arg}\, z$ (où Arg est l'argument principal, cad dans $]-\pi;\pi[$) pour $z \notin \mathbb{R}_-$. Avec l'angle moitié :
$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -e^{i\theta/2} \cdot 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\theta/2} \cdot e^{-i\pi/2} = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i(\theta - \pi)/2}$.
Cela donne bien $-\ln|1 - e^{i\theta}| = -\ln\left(2 \sin\frac{\theta}{2}\right)$ et $-\mathrm{Arg}(1 - e^{i\theta}) = \frac{\pi - \theta}{2}$ (car $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta - \pi}{2} < \frac{\pi}{2}$).

$\square$

Réf : • Gourdon, Analyse : p 252 (th d'Abel angulaire).

↳ Gourdon donne comme application $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$: moins bien que celui donné ici, qui est bien plus général (on retrouve celle de Gourdon en prenant $\theta = \pi$).

↳ Si long, ne pas faire les formules pour cos et sin, et simplement les mentionner / les garder pour les questions.

↳ Dans l'appli on utilise le critère de convergence d'Abel : si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec d'une part $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ ACV, d'autre part $\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ bornée : alors $\sum_n a_n b_n$ CV. La preuve utilise (comme celle du th d'Abel angulaire) une transformation d'Abel. La connaître, et mettre le critère dans le plan.

↳ Rq : dans la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$ pour $0 < \theta < 2\pi$, on ne peut pas intervertir les limites aux bords de l'intervalle, car la série de gauche tend vers 0 alors que le terme de droite tend vers $\pm\frac{\pi}{2}$.

↳ Appli du th d'Abel angulaire : si $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ et $\sum_n c_n$ sont CV (avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$), alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.
En effet en remplaçant par $a_n x^n$, $b_n x^n$, $c_n x^n$ la formule est vraie pour $0 \leq x < 1$ (il y a CVA) ; le th permet de faire $x \to 1$.