/ Processus de Galton-Watson | Leçons : 226, 261, 264, 266.

Énoncés : • Lemme : $(X_n)_{n\geq 1}$ va $\mathbb{N}$ iid, N va $\mathbb{N}$ tq $((X_n)_{n\geq 1}, N)$ indt. En notant
$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n \text{ et } G_X = G_{X_1}, \quad G_S = G_N \circ G_X .$$

• Th : Soient ξ une va $\mathbb{N}$ L^1, $m = E[\xi] < \infty$; $(\xi_i^n)_{n\geq 0, i\geq 1}$ iid $\sim \xi$;
$(Z_n)_{n\geq 0}$ une suite de va $\mathbb{N}$ déf par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^n$ pour $n\geq 0$;
$\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$ l'évènement d'extinction. On a les résultats suivants.

$\rightsquigarrow$ $G_{Z_n} = G_\xi^{\circ n}$ et $E[Z_n] = m^n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

$\rightsquigarrow$ $P(\mathcal{E})$ est le plus petit point fixe de G_ξ sur $[0;1]$.

$\rightsquigarrow$ Si $P_\xi \neq \delta_1$: $P(\mathcal{E}) < 1 \iff m > 1$.

⊛ **Lemme.**

Il suffit de le montrer pour $0\leq t\leq 1$.

$$G_S(t) = E[t^S] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N=n\}} t^S\right] \quad \text{car } \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N=n\}} = 1$$
$$= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{N=n\}} t^{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[1_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} t^{X_k}\right] \quad \text{par Fubini-Tonelli (ou TCM)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \prod_{k=1}^{n} E[t^{X_k}] \quad \text{par indépendance}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, G_X(t)^n$$
$$= G_N(G_X(t)). \qquad \square$$

⊛ **Th.**

• Le lemme donne, pour $n\in\mathbb{N}$, $G_{Z_{n+1}} = G_\xi \circ G_{Z_n}$. Puisque $G_{Z_0} = G_1 = \mathrm{Id}$, une récurrence immédiate donne $G_{Z_n} = G_\xi^{\circ n}$ (puissance pour la composition).
ξ est L^1 donc G_ξ est dérivable en 1 ; ce qui précède entraîne que G_{Z_n} aussi pour $n\in\mathbb{N}$, avec $G'_{Z_{n+1}}(1) = (G_\xi\circ G_{Z_n})'(1) = G'_{Z_n}(1)\cdot G'_\xi(G_{Z_n}(1)) = G'_{Z_n}(1)\cdot G'_\xi(1) = m\, G'_{Z_n}(1)$.
Là encore une récurrence immédiate offre $G'_{Z_n}(1) = m^n$ (car $G'_{Z_0}(1) = E[Z_0] = E[1] = 1$).
Ainsi Z_n est L^1 avec $E[Z_n] = m^n$.

- $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{Z_n = 0\}$ est une union $\nearrow$ donc $P(\mathcal{E}) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0)$.

Mais si $n \in \mathbb{N}$: $P(Z_{n+1} = 0) = G_{Z_{n+1}}(0) = G_\xi(G_{Z_n}(0)) = G_\xi(P(Z_n = 0))$. Par continuité de G_ξ, faire $n \to \infty$ donne $P(\mathcal{E}) = G_\xi(P(\mathcal{E}))$. C'est un point fixe ; mq c'est le plus petit.

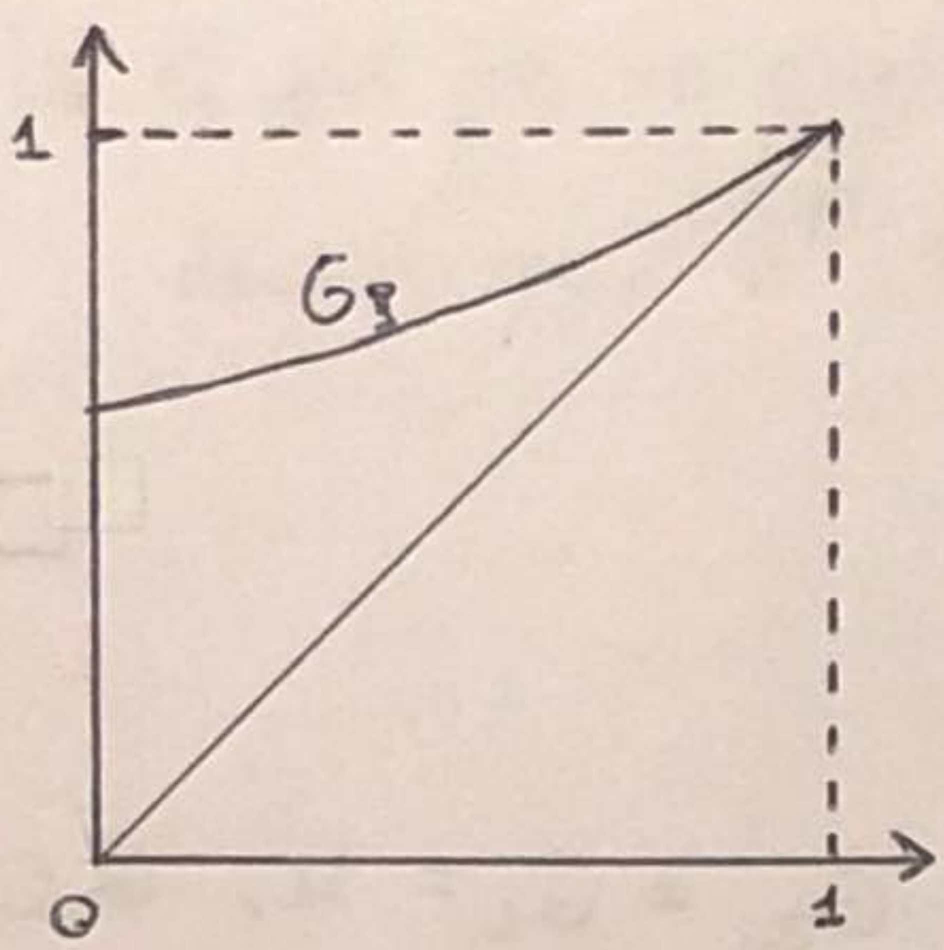
Soit $0 \leq t \leq 1$ tq $G_\xi(t) = t$. G_ξ est croissante : partant de $0 \leq t$, $G_\xi^{\circ n}(0) \leq G_\xi^{\circ n}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; autrement dit $P(Z_n = 0) = G_{Z_n}(0) \leq t$. En passant à la limite, $P(\mathcal{E}) \leq t$.

- On suppose mtn $P_\xi \neq \delta_1$. Rappelons que G_ξ est convexe sur $[0;1]$, et l'est même strictement si $P(\xi \geq 2) > 0$. Distinguons les cas $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$.

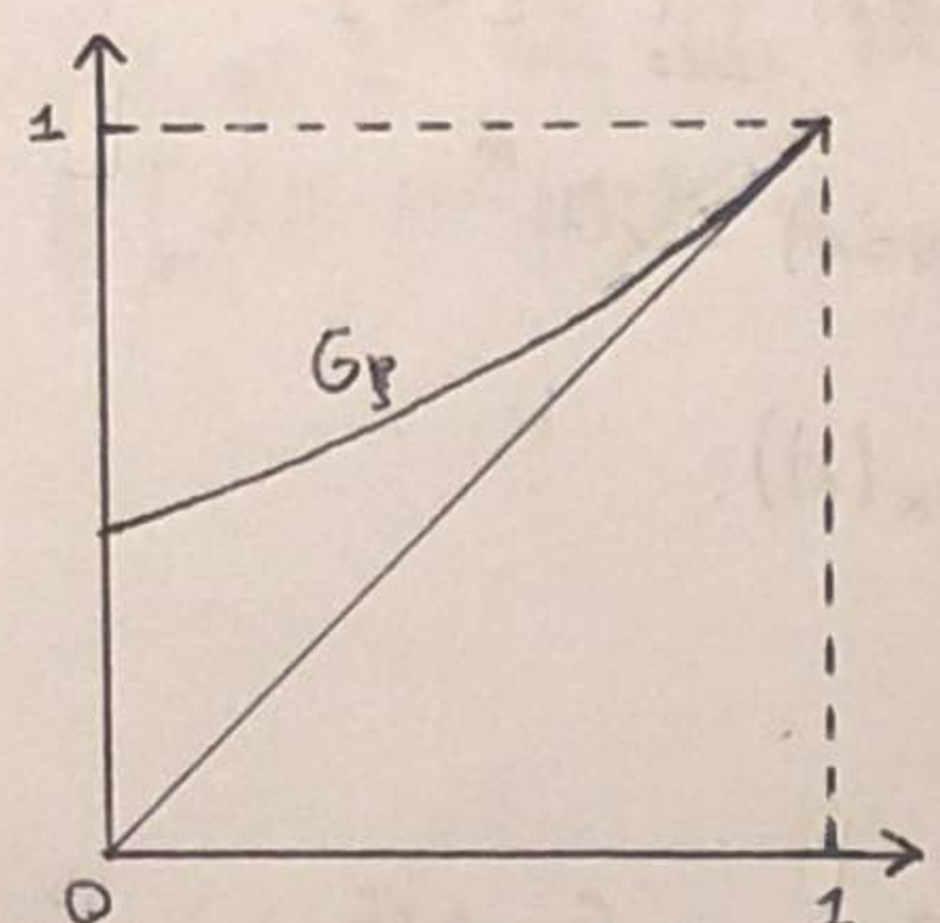
Supposons d'abord $m < 1$. On note $\tau : [0;1] \to \mathbb{R}$ l'appli affine tangente à G_ξ en 1, cad de pente $G_\xi'(1) = m < 1$ et tq $\tau(1) = G_\xi(1) = 1$. Vue la pente, $\tau(t) > t$ pour tout $0 \leq t < 1$, alors par convexité de G_ξ, $G_\xi(t) \geq \tau(t) > t$. Le seul point fixe de G_ξ sur $[0;1]$ est donc 1, et $P(\mathcal{E}) = 1$.

Passons au cas $m = 1$. Si $P(\xi \geq 2) = 0$, $1 = E[\xi] = P(\xi = 1)$ et $P_\xi \neq \delta_1$: c'est impossible puisque l'on a supposé le contraire. Donc $P(\xi \geq 2) > 0$ et G_ξ est strictement convexe. Puisque $t \mapsto t$ est la tangente à G_ξ en 1, $G_\xi(t) > t$ pour $0 \leq t < 1$. Là encore cela entraîne $P(\mathcal{E}) = 1$.

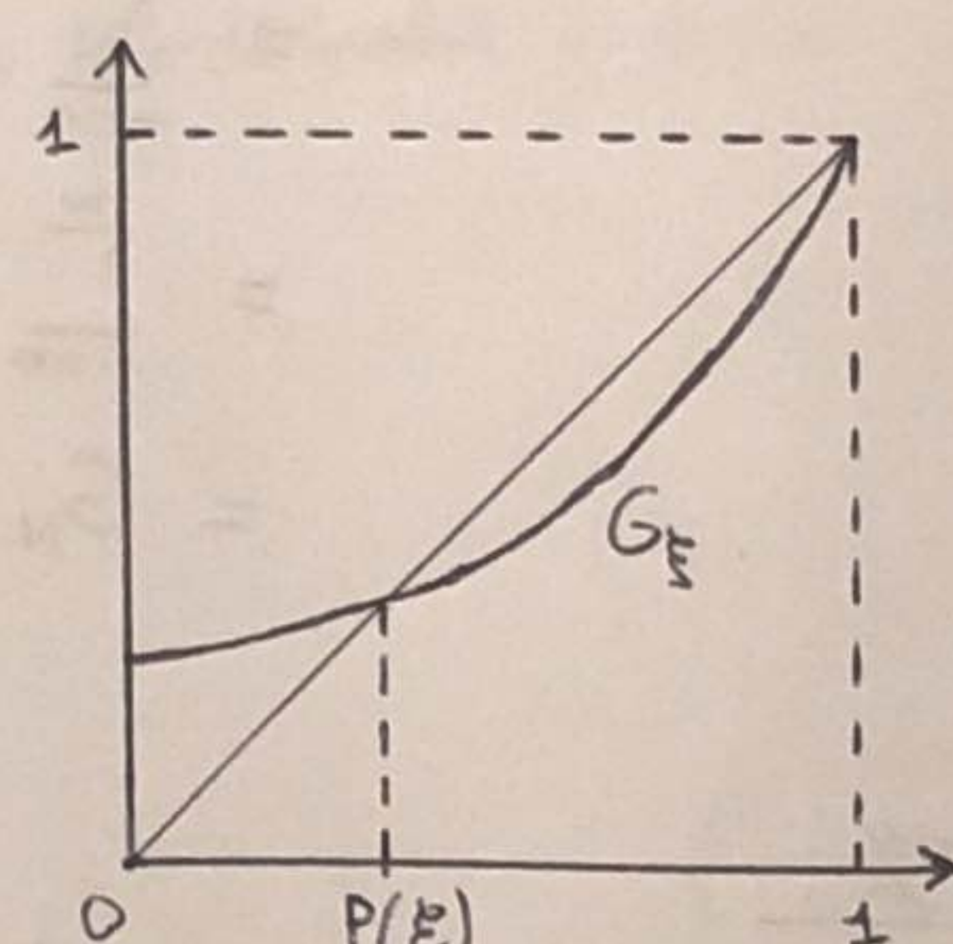
Enfin supposons $m > 1$. $G_\xi(1) = 1$ et $G_\xi'(1) > 1$ donc il existe $0 < \eta < 1$ tq pour $1 - \eta \leq t < 1$, $G_\xi(t) < t$. Or $G_\xi(0) \geq 0$ donc en appliquant le TVI à $t \mapsto G_\xi(t) - t$, on obtient un $0 \leq s < 1$ tq $G_\xi(s) = s$. Alors $P(\mathcal{E}) \leq s < 1$.



$m < 1$
(sur-critique)



$m = 1$
(critique)



$m > 1$
(sous-critique)

$\square$

Complément 1 : Lorsque $P_\xi \neq \delta_1$ et $m > 1$, G_ξ n'a qu'un seul point fixe < 1 (qui est donc $P(E)$).

Preuve. Soient $s \leq s' < 1$ des points fixes de G_ξ. $G_\xi(s) = s$ et $G_\xi(1) = 1$ donc $t \mapsto t$ est la corde de G_ξ entre s et 1. Par stricte convexité (bien sûr ici $P(\xi \geq 2) > 0$), pour $s < t < 1$ on a $G_\xi(t) < t$. Cela impose $s' \notin]s;1[$, et donc $s = s'$. □

Complément 2 : Propriétés de la fonction génératrice d'une va $\mathbb{N}$ X, $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) t^n$.

(i) : Il y a CVN sur $\overline{D}(0,1)$.

(ii) : Là où il y a CVA, $G_X(t) = E[t^X]$.

(iii) : G_X caractérise P_X.

(iv) : Pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = G_X(e^{it})$.

(v) : Sur $[0;1]$, G_X est positive, croissante et convexe. Si $P(X \geq 2) > 0$ la convexité est stricte.

(vi) : X est L^1 ssi G_X est dérivable à gauche en 1. Dans ce cas $E[X] = G_X'(1)$.

Preuve. (i) : pour $t \in \overline{D}(0,1)$, $|P(X=n) t^n| \leq P(X=n)$, et $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1 < \infty$.

(ii) : d'après le th de transfert (G_X CVA en t ssi t^X est L^1).

(iii) : car c'est une série entière de rayon > 0.

(iv) : trivial.

(v) : positivité : trivial. Soit $0 \leq t < 1$: $G_X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) t^{n-1} \geq 0$, d'où $G_X \nearrow$.
$G_X''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) P(X=n) t^{n-2} \geq 0$, et si $P(X \geq 2) > 0$, on a même $G_X''(t) > 0$. D'où la convexité (éventuellement stricte).

(vi) : si X est L^1, $G_X' : t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) t^n$ CVN sur $\overline{D}(0,1)$ car $\sum_{n=1}^{\infty} n P(X=n) = E[X] < \infty$.
On obtient en particulier $G_X'(1) = E[X]$. Réciproquement si G_X est dérivable à gauche en 1, si l'on pose $f : \begin{cases} [0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{G_X(1) - G_X(t)}{1-t} \end{cases}$ on a $f(t) \xrightarrow[t \to 1]{} G_X'(1)$. De plus $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \frac{1-t^n}{1-t}$
$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k$. Alors $f \nearrow$, et la série est à termes ≥ 0, donc pour $0 \leq t < 1$ et $N \in \mathbb{N}$:
$G_X'(1) \geq f(t) \geq \sum_{n=0}^{N} P(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k$. On fait $t \to 1$: $\sum_{n=0}^{N} P(X=n)\, n \leq G_X'(1)$. Cela mq X est L^1. □

Réf :
- Appel – Probabilités pour les non-probabilistes : p 160 (cpl 2), p 194 (lemme et th).
- Feller – An introduction to probability theory and its applications, vol 1 : p 295 (th ; réf alternative)
- Garet, Kurtzmann : p 235 (cpl 2).

↳ Le processus de Galton-Watson (ou processus de branchement) modélise l'évolution d'une population engendrée par un individu. À l'étape $n \in \mathbb{N}$, Z_n représente le nb d'individus, et pour $1 \leq j \leq Z_n$, ξ_j^n représente le nb de descendants du j^e de ces individus. La loi P_ξ est apelée loi de reproduction. À l'origine ce modèle a été introduit pour étudier la persistance des noms de famille dans la noblesse anglaise.

↳ On remarque que $P(\mathcal{E}) = 0 \Leftrightarrow \xi \geq 1$ ps.

↳ Le pb peut être étudié plus en profondeur à l'aide de la théorie des martingales (en effet, $(m^{-n} Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale).

↳ Appel : pas dans la BA officielle, pourtant c'est la meilleure ref.

↳ Ne pas admettre le lemme, il est central (et facile). Si il manque du temps, garder le calcul de $E[Z_n]$ pour la fin (il ne sert nulle part).

↳ Le lemme admet une généralisation, avec les même hyp mais X_n va $\mathbb{R}^d$: $\phi_S = G_N \circ \phi_X$. La preuve est la même (en remplaçant Fubini-Tonelli / TCM par Fubini-Lebesgue / TCD).

↳ Parmi les propriétés de G_X, on utilise surtout (v) et (vi). Dans (vi), le sens "G_X dérivable à gauche en $1 \Rightarrow X \, L^1$" n'est utilisé que lors du calcul de $E[Z_n]$. C'est la seule prop un peu subtile ; sa preuve n'est pas dans Appel mais est dans Garet-Kurtzmann.

↳ Ce point (vi) se généralise : X est L^k ssi G_X est k fois dérivable à gauche en 1 ; dans ce cas, $G^{(k)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$.