Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Leçons : 223, 262, 264, 266.

Énoncés : • Prop : Soient μ une proba sur $\mathbb{Z}$, $(X_k)_{k\geq 1}$ iid de loi μ. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $N = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n = 0\}}$ le nb de passages en 0 (N est une va à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Alors $P(N=\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) < \infty \\ 1 & \text{si } \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=0) = \infty \end{cases}$.

• Appli : Cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $\mu = (\delta_{-1}+\delta_1)/2$: $N = \infty$ ps.

• Th : Si $\mu \neq \delta_0$ est symétrique, $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = -\infty$ ps et $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n = \infty$ ps.

⊛ Prop.

• Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) < \infty$, le premier lemme de B-C dit que $P(\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \{S_n = 0\}) = 0$.
Or $\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \{S_n=0\} = \{N=\infty\}$ (c'est l'ens des ω tq $S_n(\omega)=0$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$) :
$P(N=\infty) = 0$.

• Notons $A = \Omega \setminus \{N=\infty\} = \{N<\infty\}$. On pose $T = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{n \in \mathbb{N} \mid S_n = 0\}$ l'instant du dernier passage en 0 (c'est une va dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). On peut alors écrire $A = \{T<\infty\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \{T=n\}$
$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\{S_n=0\} \cap \{\forall k>n, S_k \neq 0\}) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (\{S_n=0\} \cap \{\forall k>n, S_k - S_n \neq 0\})$, ce qui permet de faire apparaître, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, deux évènements indépendants. On en déduit

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=0)\, P(\forall k>n, S_k - S_n \neq 0).$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$: par limite $\searrow$, $P(\forall k>n, S_k-S_n \neq 0) = \lim_{m\to\infty} P(\forall k \in [\![n+1;m]\!], S_k - S_n \neq 0)$.
Or pour $m>n$, $S_k - S_n = \sum_{i=n+1}^{k} X_i$ pour $n<k\leq m$ et les $(m-n)$-uplets $(S_k-S_n)_{n<k\leq m}$ et $(S_l)_{0<l\leq m-n}$ ont même loi : $P(\forall k \in [\![n+1;m]\!], S_n - S_k \neq 0) = P(\forall l \in [\![1;m-n]\!], S_l \neq 0)$.
En faisant $m \to \infty$ on en déduit $P(\forall k>n, S_k - S_n \neq 0) = P(\forall l>0, S_l \neq 0) = P(T=0)$.
La somme étant infinie par hypothèse et toute proba
Finalement $P(A) = P(T=0) \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=0)$.
étant finie, cette égalité impose $P(T=0)=0$ donc $P(A)=0$. Ainsi $P(N=\infty)=1$. $\square$

⊛ Appli.

On mq $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n=0) = \infty$. $P(S_{2n+1}=0)$ pour $n \in \mathbb{N}$ de façon évidente. En remarquant que $(X_1+1)/2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$, on a $(S_n+n)/2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$ et donc pour $n\in\mathbb{N}$: $P(S_{2n}=0)$
$= P((S_{2n}+2n)/2 = n) = \binom{2n}{n} (1/2)^{2n} (1/2)^{2n} = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

On utilise alors l'équivalent de Stirling $k! \underset{k\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$: $2^{-2n}\binom{2n}{n} = 2^{-2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$
$\underset{n\to\infty}{\sim} 2^{-2n} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ceci mq la série diverge. $\square$

⊗ Th.

- Dans un premier temps on suppose seulement $\mu \neq \delta_0$ et on mq $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée ps. $\mu(\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \neq 0$ donc quitte à remplacer μ par $A \mapsto \mu(-A)$, on peut sq $\mu(\mathbb{N}^*) \neq 0$. Fixons $m \in \mathbb{N}$: on mq $P(\exists n\in\mathbb{N}, |S_n| \geq m) = 1$.
Pour $l \in \mathbb{N}$ on pose $A_l = \bigcap_{i=1}^{2m}\{X_{l+i} \geq 1\}$: $A_l \subset \{S_{l+2m} - S_l \geq 2m\} \subset \{|S_{l+2m}| \geq m\} \cup \{|S_l| \geq m\}$ $\subset \{\exists n\in\mathbb{N}, |S_n| \geq m\}$. Par regroupement $(A_{2ml})_{l\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants (A_{2ml} ne faisant intervenir que $X_{2ml+1}, \dots, X_{2m(l+1)}$). De plus $P(A_{2ml}) = P(X_1 \geq 1)^{2m} = \mu(\mathbb{N}^*)^{2m} > 0$ ne dépend pas de l. On a $\sum_{l=0}^{\infty} P(A_{2ml}) = \infty$, et d'après le second lemme de B-C, $P(\overline{\lim_{l\in\mathbb{N}}} A_{2ml}) = 1$.
Or ce qui précède mq $\overline{\lim_{l\in\mathbb{N}}} A_{2ml} \subset \{\exists n\in\mathbb{N}, |S_n| \geq m\}$, ce dont le résultat découle.

- Supposons outre de plus μ symétrique. On note $B = \{\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = -\infty\}$ et $C = \{\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n = \infty\}$.
Par symétrie de μ il est facile de voir que $P(B) = P(C)$ (en effet $\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = -\overline{\lim}_{n\to\infty}(-S_n)$ a m̂ loi que $-\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n$). Pour $k \geq 1$: $C = \{S_k + \overline{\lim}_{n\to\infty}(S_n - S_k) = \infty\} = \{\overline{\lim}_{n\to\infty}(S_n - S_k) = \infty\}$
$= \{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=k+1}^{n} X_i = \infty\} \in \sigma((X_i)_{i\geq k})$. C appartient donc à la tribu terminale
$\bigcap_{k\geq 1}\sigma((X_i)_{i\geq k})$, et par la loi du 0-1 de Kolmogorov, $P(C) \in \{0,1\}$.
Or d'après ce qui précède : $1 = P((S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non bornée}) = P(B \cup C)$. On ne peut donc avoir $P(B) = P(C) = 0$, et on conclut $P(B) = P(C) = 1$. $\square$

Complément : Récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$.
Avec les notations de la prop., excepté μ la loi uniforme sur $\{x\in\mathbb{Z}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} = \{(\pm1,0),(0,\pm1)\}$:
$N = \infty$ ps.

Preuve.
Pour $k \geq 1$ on note $X_k = (X_k^{(1)}, X_k^{(2)})$, $Y_k = X_k^{(1)} + X_k^{(2)}$, $Z_k = X_k^{(1)} - X_k^{(2)}$. Si $X_k \in \{(1,0),(0,1)\}$, $Y_k = 1$; sinon $X_k \in \{(-1,0),(0,-1)\}$ et $Y_k = -1$: on en déduit $Y_k \hookrightarrow (\delta_{-1}+\delta_1)/2$. De m̂ $Z_k \hookrightarrow (\delta_{-1}+\delta_1)/2$. De plus si $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm1\}$:
$P(\{Y_k = \varepsilon\} \cap \{Z_k = \varepsilon'\}) = P(X_k = (\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2})) = 1/4 = (1/2)^2 = P(Y_k = \varepsilon)P(Z_k = \varepsilon')$. Donc Y_k et Z_k sont indépendantes.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$: $S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $S_n^{(1)} - S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ sont des marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}$ indépendantes.
Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$: $P(S_{2n} = 0) = P(S_{2n}^{(1)} + S_{2n}^{(2)} = S_{2n}^{(1)} - S_{2n}^{(2)} = 0) = P(S_{2n}^{(1)} + S_{2n}^{(2)} = 0)\,P(S_{2n}^{(1)} - S_{2n}^{(2)} = 0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$ d'après le cas de la dimension 1. Ceci mq $\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \infty$, d'où $N = \infty$ ps. $\square$

Réf : • Garet, Kurtzmann : p 254 (prop, appli).

• Benaïm, El Karoui - Promenade aléatoire : p 83 (ql).

↳ Idée du dév : étude de deux aspects des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$. Les deux preuves ne sont pas liées.

↳ La prop est valable pour toute marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ (sans modifier la preuve).

↳ Attention aux défs de N et T : $\{N < \infty\} = \{T < \infty\}$ (et par ailleurs $N \leq T+1$) mais leurs valeurs lorsqu'elles sont finies sont différentes en général.

↳ Dans le premier cas de la preuve on peut remontrer B-C 1 : $E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0)$ par Fubini-Tonelli ; si $E[N] < \infty$, $N < \infty$ ps.

↳ Dans le second cas de la preuve on ne peut appliquer B-C 2, faute d'indépendance.

↳ Appli : il est aussi facile de faire une preuve combinatoire de $P(S_{2n}=0) = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$.

↳ Une proba μ sur $\mathbb{R}^d$ est dite symétrique lorsque $\mu(-A) = \mu(A)$ pour tout événement. Attention : espérance nulle $\not\Rightarrow$ symétrique (exemple : $(2\delta_{-1} + \delta_2)/3$).

↳ Si μ est d'espérance $m \neq 0$: $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} nm$ ps par la LGN forte.

↳ Le th est vrai aussi si μ est une proba sur $\mathbb{R}$. Seul le début de la preuve change un peu : on peut sq $\mu(\mathbb{R}_+^*) \neq 0$; soit $\varepsilon > 0$ tq $\mu([\varepsilon ; \infty[) \neq 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tq $k \geq \frac{2m}{\varepsilon}$: pour $l \in \mathbb{N}^*$ on déf $A_l = \bigcap_{i=1}^{k} \{X_{l+i} \geq \varepsilon\}$. La suite est identique.

↳ Th de Polya : la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ (déf par μ uniforme sur $\{x \in \mathbb{Z}^d \,/\, \|x\|_1 = 1\}$) est récurrente ($N = \infty$ ps) si $d \in \{1, 2\}$, transiente ($N < \infty$ ps) si $d \geq 3$. On a montré ici (appli et ql) les deux cas récurrents. Pour la généralité il faut utiliser la fonction caractéristique de μ et des intégrales.