Développement asymptotique d'une suite définie par récurrence et exemple

Leçons : 223, 226.

Énoncés : • prop : si $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - a x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$ avec $a>0$ et $\alpha>1$, il existe $\eta>0$ tel que pour $u_0 \in]0;\eta[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n\,a(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

• exemple : $f = \sin$. $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$; on peut raffiner à $u_n \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\cdot\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\,(1+o(1))$.

⊛ Prop.

On a $f(x) \underset{x\to0}{=} x - ax^{\alpha} + o(x^{\alpha}) \underset{x\to0}{=} x\left(1 - ax^{\alpha-1}(1+o(1))\right)$. Soit $\eta_0>0$ tq sur $]0;\eta_0[$ le terme en $o(1)$ soit $|\cdots| \leq \frac{1}{2}$. Pour $x\in]0;\eta_0[$, $f(x) \leq x\left(1-ax^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{2}\right) < x$ puisque $a>0$. On cherche $0<\eta\leq\eta_0$ tq pour $x\in]0;\eta[$, $0<f(x)$, ce qui est vrai quand $0 < x\left(1-ax^{\alpha-1}\cdot\frac{3}{2}\right)$, cad $ax^{\alpha-1}\cdot\frac{3}{2}<1$, cad $x < \left(\frac{2}{3a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$. On pose $\eta = \min\left(\eta_0, \left(\frac{2}{3a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$, et alors pour $x\in]0;\eta[$, $0<f(x)<x$. Ainsi f stabilise $]0;\eta[$ et on prend $u_0\in]0;\eta[$. La suite u, def par $u_{n+1}=f(u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$, est donc bien définie, >0 et $\searrow$.

On a donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \geq 0$: mq $l=0$. Pour $n\in\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n)}{u_n} \leq 1 - au_n^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{2}\right) \leq 1 - \frac{al^{\alpha-1}}{2}$ car $l<u_n$. Si $l>0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est majoré par $1-\frac{al^{\alpha-1}}{2}<1$, ce qui impose $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: contradiction. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose ensuite $v_n = u_n^{1-\alpha}$ pour $n\in\mathbb{N}$: $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$. On a : $v_{n+1} = f(u_n)^{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{=} u_n^{1-\alpha}\left(1-au_n^{1-\alpha}(1+o(1))\right)^{1-\alpha}$
$\underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1-\frac{a}{v_n}(1+o(1))\right)^{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1-(1-\alpha)\frac{a}{v_n}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} v_n + a(\alpha-1) + o(1)$.

v est $\nearrow$ donc $v_{n+1}-v_n \geq 0$; de plus $a(\alpha-1)>0$: par comparaison la série $\sum_n (v_{n+1}-v_n)$ diverge et sa somme partielle équivaut à celle de $\sum_n a(\alpha-1)$, autrement dit : $v_n - v_0 \underset{n\to\infty}{\sim} n\,a(\alpha-1)$, cad $u_n^{1-\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} n\,a(\alpha-1)$, cad $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n\,a(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

□

⊛ Exemple.

On a $\sin x \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, donc on applique avec $a=\frac{1}{6}$, $\alpha=3$: $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(n\cdot\frac{2}{6}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Ici $v_n = u_n^{-2}$. On fait un calcul similaire à précédemment mais avec un terme de plus :

$v_{n+1} \underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1-\frac{u_n^2}{6}+\frac{u_n^4}{120}+o(u_n^4)\right)^{-2} \underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1-2\left(-\frac{u_n^2}{6}+\frac{u_n^4}{120}+o(u_n^4)\right)+3\left(-\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^2)\right)^2+o(u_n^4)\right)$

$\underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1+\frac{u_n^2}{3}+\frac{u_n^4}{15}+o(u_n^4)\right)$ car $-\frac{2}{120}+\frac{3}{36} = \frac{-1+5}{60} = \frac{1}{15}$. Ainsi $v_{n+1} \underset{n\to\infty}{=} v_n + \frac{1}{3} + \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2)$

$\underset{n\to\infty}{=} v_n + \frac{1}{3} + \frac{1}{5n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Là encore, car pour n assez grand, $v_{n+1}-v_n-1/3 = \frac{1}{5n}+o\left(\frac{1}{n}\right)>0$, les sommes partielles des séries $\sum_n\left(v_{n+1}-v_n-\frac{1}{3}\right)$ et $\sum_n \frac{1}{5n}$ sont équivalentes,

cad $v_n - \frac{n}{3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{5}$, cad $v_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5}(1+o(1))$.

Alors $u_n = v_n^{-1/2} \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1+\frac{3\ln n}{5n}(1+o(1))\right)^{-1/2} \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}}\left(1-\frac{3\ln n}{10n}(1+o(1))\right) \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\cdot\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}(1+o(1))$.

□

Complément. Exemple pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$: $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$; on peut raffiner à $u_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{n}{2} + \frac{2\ln n}{3n^2}(1+o(1))$.

On suit exactement la même stratégie que pour sin. On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, et ici $a = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$: $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(n \cdot \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{n}$.

Ici $v_n = u_n^{-2}$. $v_{n+1} \underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1 - \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1 - \left(-\frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) + \left(-\frac{u_n}{2} + o(u_n)\right)^2 + o(u_n^2)\right)$

$\underset{n\to\infty}{=} v_n\left(1 + \frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{12} + o(u_n^2)\right) \underset{n\to\infty}{=} v_n + \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o(u_n) \underset{n\to\infty}{=} v_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On a donc (on passe à l'opposé car ici pour n assez grand les termes sont <0) $v_n - v_{n+1} + \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{6n}$, et en passant aux sommes partielles : $-v_n + \frac{n}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{6}$, cad $v_n \underset{n\to\infty}{=} \frac{n}{2} - \frac{\ln n}{6}(1+o(1))$, et

$u_n = v_n^{-1} \underset{n\to\infty}{=} \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln n}{3n}(1+o(1))\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{=} \frac{2}{n}\left(1 + \frac{\ln n}{3n}(1+o(1))\right) \underset{n\to\infty}{=} \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2}(1+o(1))$. □

Réf: FGN, Analyse 1 : p 99 (contient prop générale plus les deux exemples).

- On ne suppose pas f continue (mais le DL l'impose dérivable donc continue en 0).
- On peut généraliser les calculs faits dans les exemples, mais des coefs moches apparaissent (notamment avec des coefs binomiaux généralisés).
- Attention au th de sommation des relations de comparaison : on doit avoir les termes ≥ 0 apcr.
- Complément : même méthode que sin mais pour $x \mapsto \ln(1+x)$. C'est celui-ci qui est le plus souvent associé à ce dev (et pas sin).