Leçons : 214, 215.

Lemme de Morse

Énoncés : • Lemme : soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Il existe V un voisinage ouvert de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tq : $\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A) \cdot A_0 \cdot \rho(A)$.

• Th : $U \ni 0$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$. On sq $D_0 f = 0$ et $D_0^2 f$ est non dégénérée, et on note $(p, n-p)$ sa signature. Alors il existe V un voisinage ouvert de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : V \to \phi(V)$ tq $\phi(0) = 0$ et : $\forall x \in V,\ f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \phi_i(x)^2$.

⊛ Lemme.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre. Soit $\varphi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tMA_0M \end{cases}$: c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Calculons $D_{I_n}\varphi$.

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$: $\varphi(I_n + H) = (I_n + {}^tH)A_0(I_n + H) = A_0 + A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H = \varphi(I_n) + A_0H + {}^t(A_0H) + o(H)$, donc $D_{I_n}\varphi(H) = A_0H + {}^t(A_0H)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(D_{I_n}\varphi) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On ne peut pas appliquer le th d'inversion locale, on va donc restreindre l'espace de départ. On pose $F = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: c'est un supplémentaire de $A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On a $I_n \in F$, et en posant $\Psi = \varphi|_F$: $\operatorname{Ker}(D_{I_n}\Psi) = \{0\}$. $D_{I_n}\Psi$ est injective, or $\dim F = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc c'est un isomorphisme.

Par le th d'inversion locale soit U un voisinage ouvert de I_n dans F tq Ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo de U sur $\Psi(U)$. Quitte à restreindre/corestreindre Ψ on peut supposer $U \subset GL_n(\mathbb{R})$ (en effet $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, et Ψ demeure un $\mathcal{C}^1$-difféo). $\Psi(U)$ est un voisinage ouvert de $\Psi(I_n) = A_0$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus $\Psi(U) \subset GL_n(\mathbb{R})$; et pour tout $A \in \Psi(U)$ on a $A = {}^t(\Psi^{-1}(A))A_0\Psi^{-1}(A)$: prendre $V = \Psi(U)$ et $\rho = \Psi^{-1}$ convient. □

⊛ Th.

On écrit Taylor-reste intégral à l'ordre 1 au voisinage de 0 : pour $x \in U$: $f(x) - f(0) = D_0f(x) + \int_0^1 (1-t) D_{tx}^2(x,x)\, dt$
$= \int_0^1 (1-t)\, {}^tx(\operatorname{Hess}_{tx} f)x\, dt = {}^tx\, Q(x)\, x$ où l'on note $Q(x) = \int_0^1 (1-t) \operatorname{Hess}_{tx} f\, dt = \left[\int_0^1 (1-t)\, \partial_i\partial_j f(tx)\, dt\right]_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$. On va mq Q est bien déf et $\mathcal{C}^1$; autrement dit on le montre pour chacune de ses composantes : fixons $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$. $Q_{i,j}$ est $\mathcal{C}^1$ ssi $\forall 1 \le k \le n$, $\partial_k Q_{i,j}$ est bien déf et $\mathcal{C}^0$: fixons $1 \le k \le n$. On utilise le th de dérivation sous l'intégrale sur un ouvert U' borné tq $\overline{U'} \subset U$.

→ Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)\partial_i\partial_j f(tx)$ est $\mathcal{C}^0$ donc L^1.

→ Pour $0 \le t \le 1$, $x \mapsto (1-t)\partial_i\partial_j f(tx)$ admet une dp $\mathcal{C}^0$ p/r à e_k (car f est $\mathcal{C}^3$).

→ Pour $0 \le t \le 1$, $\partial_k(x \mapsto (1-t)\partial_i\partial_j f(tx)) = (x \mapsto (1-t)t\, \partial_k\partial_i\partial_j f(tx))$ est $\mathcal{C}^0$, donc bornée sur le compact $\overline{U'}$ donc sur U' : on a la domination (par une fonction de t qui est L^1).

Donc $Q_{i,j}$ est bien déf et $\mathcal{C}^1$ sur tout U', donc sur U ; et c'est vrai pour Q.

Ensuite, $Q(0) = \int_0^1 (1-t) \operatorname{Hess}_0 f\, dt = \frac{1}{2}\operatorname{Hess}_0 f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$: on applique le lemme : soient V et ρ comme dans le lemme.

Par continuité de Q soit W un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $W \subset Q^{-1}(V)$: pour $x \in W$, $Q(x) = {}^t\rho(Q(x)) \cdot Q(0) \cdot \rho(Q(x))$. Par le th de réduction des formes quadratiques réelles et vu que $Q(0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Hess}_0 f$ a pour signature $(p, n-p)$, soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $Q(0) = {}^tA\, J\, A$, où l'on note $J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$. Alors pour $x \in W$, $f(x) - f(0) = {}^tx\, {}^t\rho(Q(x))\, {}^tA\, J\, A\, \rho(Q(x))\, x$

$= {}^t\Phi(x) \cdot J \cdot \Phi(x)$, avec $\Phi : \begin{cases} W \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto A \cdot \rho(Q(x)) \cdot x \end{cases}$. Cela se réécrit bien $f(x) - f(0)$

$= \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \Phi_i(x)^2$.

Reste à vérifier que Φ établit un $\mathcal{C}^1$-difféo entre deux voisinages de 0 (puisque $\Phi(0) = 0$). D'abord puisque Q et ρ sont $\mathcal{C}^1$, Φ l'est. On va utiliser le th d'inversion locale. Pour $h \in W$: $\Phi(h) = A\rho(Q(h))h = A\rho(Q(0))h + A(\rho(Q(h)) - \rho(Q(0)))h \underset{h\to 0}{=} A\rho(Q(0))h + o(h)$ car $\rho(Q(h)) - \rho(Q(0)) \underset{h\to 0}{=} o(1)$. Donc $D_0\Phi = (h \mapsto A\rho(Q(0)) \cdot h) \in GL(\mathbb{R}^n)$. Par le th d'inversion locale il existe $V \subset W$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tq $\Phi : V \to \Phi(V)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo. $\square$

Réf : Rouvière, Petit guide de calcul différentiel : exo 114, p 354.

↳ Dans Rouvière, l'exo 114 est le lemme de Morse. Le lemme est l'exo 66 (c'est dit dans l'exo 114).

↳ Le lemme montre que dans un voisinage de A_0 les matrices sont semblables à A_0, avec changement de base $\mathcal{C}^1$. Il a aussi pour corollaire que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature donnée est ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées.

↳ Ici on prend pour la signature la convention $(p, n-p)$ avec p le nombre de $+$ et $n-p$ le nombre de $-$ (cad que $\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix}$ est de signature $(p, n-p)$).

↳ Dans le th on utilise la formule de Taylor avec reste intégral : on la rappelle ici.
Si $k \in \mathbb{N}$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ tq $[a; a+h] \subset U$. Si f est $\mathcal{C}^{k+1}$:
$f(a+h) - \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} D_a^l f(h, \cdots, h) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D_{a+th}^{k+1}(h, \cdots, h)\, dt$.

↳ Le fait que Q est $\mathcal{C}^1$ n'est pas justifié dans Rouvière ; cela se montre comme fait ici par le th de dérivation sous l'intégrale avec les dérivées partielles. Ne pas donner tous les détails.