

Énoncé : On se place dans l'espace des fonctions 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
 Pour $f \in L^1$ et $N \geq 1$ on note $\sigma_N(f) = f * K_N$ avec K_N le noyau de Fejér.
 $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^0$, pour tout $N \geq 1$ on a $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et $\sigma_N(f) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{cvu}} f$.
 $\rightarrow$ Si $f \in L^1$ avec $1 \leq p < \infty$, pour tout $N \geq 1$ on a $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$,
 et $\sigma_N(f) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^1} f$.

Preuve.

• D'abord $\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty$.

Si $\delta > 0$ on note $\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$: ω est le module de continuité de f ,
 bien def car f est continue et périodique donc uniformément continue. De plus $\omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $|f(x) - \sigma_N(f)(x)| = \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \right|$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_N(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t) dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} \dots dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} \dots dt$$

$$\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t) dt + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} K_N(t) dt$$

$$\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi N} \int_{\delta < |t| \leq \pi} \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt$$

$$\leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin^2(\delta/2)} \quad \text{car } \sin^2(Nt/2) \leq 1 \text{ et } \sin^2(t/2) \geq \sin^2(\delta/2) \text{ (en effet } \sin^2 \nearrow \text{ sur } [-\pi/2; \pi/2]).$$

Passer à la limite supérieure en N donne alors $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \omega(\delta)$.

Un que $\omega(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$, cette limite supérieure est nulle : $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \sigma_N(f)\|_\infty = 0$.

• Commençons par la majoration. Si $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_N(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| K_N(t) dt$.

Ceci est la norme 1 de $t \mapsto |f(x-t)|$ pour la mesure de densité $\frac{1}{2\pi} K_N$; cette mesure étant une probabilité, cette norme est inférieure à la norme p de la même fonction $t \mapsto |f(x-t)|$:

$$|\sigma_N(f)(x)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) dt \right)^{1/p}. \text{ Ensuite on a}$$

$$\|\sigma_N(b)\|_1^\uparrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N(b(x))|^\uparrow dx \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |b(x-t)|^\uparrow K_N(t) dt dx$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \int_{-\pi}^{\pi} |b(x-t)|^\uparrow dx dt \quad \text{par Fubini-Corollaire}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \|b\|_1^\uparrow dt$$

$$\leq \|K_N\|_1 \|b\|_1^\uparrow$$

$$\leq \|b\|_1^\uparrow$$

d'où $\|\sigma_N(b)\|_1 \leq \|b\|_1$.

Maintenant si $x \in \mathbb{R}$, $b(x) - \sigma_N(b)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (b(x) - b(x-t)) K_N(t) dt$ comme vu précédemment ; le m. alal que ci-dessus donne, on s'arrêtant un peu avant :

$$\|b - \sigma_N(b)\|_1^\uparrow \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \int_{-\pi}^{\pi} |b(x) - b(x-t)|^\uparrow dx dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) dt \quad \text{en posant } g: t \mapsto \|b - \tau_t b\|_1^\uparrow$$

$$\leq (g * K_N)(0)$$

$$\leq \sigma_N(g)(0).$$

Or $g \in \mathcal{C}^0$ (continuité des translations) : on peut appliquer le premier point du th et obtenir $\sigma_N(g)(0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} g(0) = 0$. Ainsi $\lim_{N \rightarrow \infty} \|b - \sigma_N(b)\|_1 = 0$. □

Complément 1 : Collaires immédiats.

(i) L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}^0$ et dans L^1 pour $1 \leq p < \infty$; en particulier $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2 .

(ii) Pour $b \in \mathcal{C}^0$ et $x \in \mathbb{R}$, si $S_N(b)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} l \in [-\infty; \infty]$, alors $l = b(x)$.

(iii) Si $f, g \in L^1$ vérifient $C_n(f) = C_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$ p.p.

Preuve. (i) : pour toute $b \in L^1$, $\sigma_N(b)$ est un polynôme trigonométrique pour $N \geq 1$, d'où les densités. Dans le cas de L^2 , il suffit de rappeler l'orthogonalité de la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ pour voir qu'il s'agit d'une base hilbertienne.

(ii) : Si $S_N(b)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} l$, le th de Carleson entraîne $\sigma_N(b)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} l$. Or le th de Fejér implique $\sigma_N(b)(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b(x)$, d'où le résultat.

(iii) : Sous cette hypothèse, $\sigma_N(f) = \sigma_N(g)$ pour tout $N \geq 1$. Le th de Fejér dans L^1 entraîne alors $f = g$ p.p. □

Complément 2: Si w est le module de continuité de f uniformément continue, $w(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$.

Preuve. On rappelle $w(s) = \sup_{|x-y| \leq s} |f(x) - f(y)| \in [0; \infty]$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme il existe $\delta > 0$ tq si $|x-y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Alors si $\eta \in [0; \delta]$ et $|x-y| \leq \eta$, $|x-y| \leq \delta$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$: par def, $w(\eta) \leq \varepsilon$. $\square$

Complément 3: Propriétés de K_N , def par $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$ avec D_n le noyau de Dirichlet.

(i) $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.

(ii) $K_N(t) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 \geq 0$.

(iii) $\|K_N\|_1 = 1$.

(iv) Si $0 < \delta \leq \pi$, $\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

(v) $f * K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$.

Preuve. (i): $N K_N = \sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|j| \leq n} e_j = \sum_{|j| \leq N-1} e_j \sum_{n=|j|}^{N-1} 1 = \sum_{|j| \leq N-1} (N - |j|) e_j = \sum_{|j| \leq N} (N - |j|) e_j$.

(ii): $N K_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} = \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \exp(i(n+1/2)t) \right)$. On la somme se réécrit $e^{it/2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{int} = e^{it/2} \cdot \frac{e^{iNt} - 1}{e^{it} - 1} = e^{iNt/2} \frac{e^{iNt/2} - e^{-iNt/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = e^{iNt/2} \frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}$. On a donc $N K_N(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} \operatorname{Im} (e^{iNt/2} \frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}) = \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}$.

(iii): $\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt = C_0(K_N) = 1$ puisque $K_N \geq 0$.

(iv): On l'a montré dans le dev: si $\delta \leq |t|$, $\sin(t/2) \geq \sin(\delta/2)$ puisque $\sin \nearrow$ sur $[-\pi/2; \pi/2]$. Alors $K_N(t) \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)}$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) dt \leq \frac{1}{N \sin^2(\delta/2)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

(v): $f * K_N = f * \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$. $\square$

Complément 4: Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$: l'appli $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow L^p \\ a \mapsto \tau_a f \end{cases}$ est continue en 0; autrement dit $\tau_a f \xrightarrow{a \rightarrow 0} f$.

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans L^p : soit $g \in \mathcal{C}^\infty$ tq $\|f - g\|_p \leq \varepsilon/3$. g est en fait uniformément continue: on peut prendre $\delta > 0$ tq si $|a| \leq \delta$ et $t \in \mathbb{R}$, $|g(t-a) - g(t)| \leq \varepsilon/3$. Alors $\|\tau_a g - g\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t-a) - g(t)|^p dt \leq (\varepsilon/3)^p$. Ainsi si $|a| \leq \delta$: $\|\tau_a f - f\|_p \leq \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. $\square$

Ref: QZ : p 76 (ql 3), p 84 (th et ql 1), p 325 (ql 4).

- ↳ On peut se passer de $\omega(\delta)$ dans la preuve du point 1 du th de Fejér. En effet si l'on fixe $\varepsilon > 0$ puis $\delta > 0$ tq $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon/2$, puis que l'on peut $N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow \frac{2 \|f\|_1}{N \sin^2(\delta/2)} \leq \varepsilon/2$, on obtient $\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \leq \varepsilon$.
- ↳ Rappel : pour une mesure de proba, Hölder donne $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p$. En effet $\|f\|_1 = \|f \cdot 1\|_1 \leq \|f\|_p \|1\|_q = \|f\|_p$.
- ↳ La continuité de l'opli translation se généralise à $\mathbb{R}^d$ muni de λ_d en posant f à support compact.
- ↳ La translation est continue partout, pas seulement en 0. En effet si $h \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1$: $\tau_a f = \tau_{a-h} \tau_h f$
 $\xrightarrow{a \rightarrow b} \tau_a f$.
- ↳ Le th de Fejér permet de forcer la CV en procédant par sommation de Césaro. C'est un des th majeurs de la théorie des séries de Fourier.
- ↳ Si $f \in \mathcal{C}^0$, on n'a pas en général $S_N(f) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{CVS} f$ (et encore moins uniformément). Par exemple la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique et paire tq si $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin((2k^3+1)x/2)$ est tq $(S_n(f)(0))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (voir Goursat p 264).
- ↳ On peut, à l'aide du th de Banach-Steinhaus, montrer un résultat plus fort : si $x \in \mathbb{R}$ est fixé, l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0$ tq $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge contient un G_δ dense dans $\mathcal{C}^0$ (voir Goursat p 405, ou Berman p 246).
- ↳ S'il reste du temps : expliquer un ou plusieurs des trois corollaires directs du th de Fejér (ql 2).