Leçons : 207, 245, 265.

Th de Wielandt

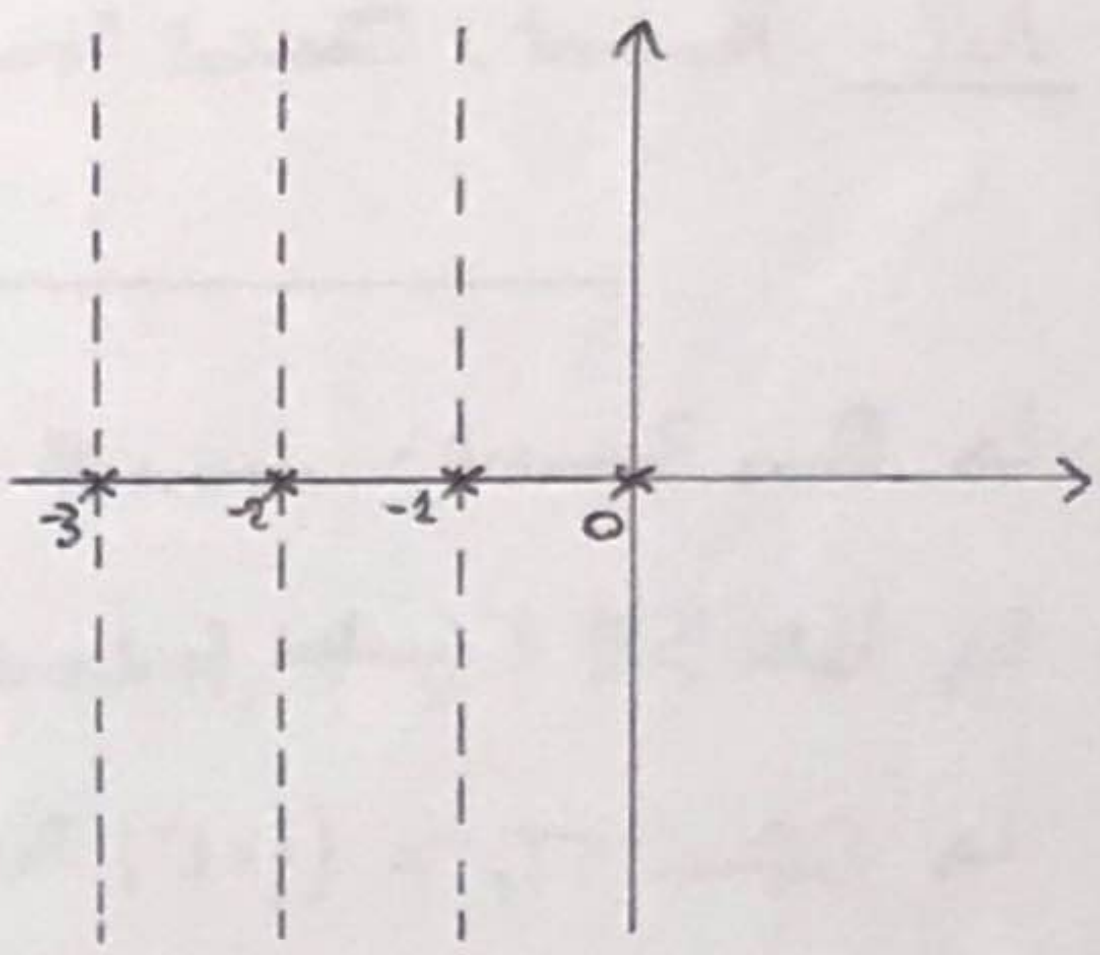
Énoncés : • lemme : si $g \in \mathcal{H}(\Pi_0)$ vérifie (EF) : $\forall z \in \Pi_0$, $g(z+1) = z\, g(z)$, alors g se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$, avec les pôles simples (ou singularités effaçables) $-n$ de résidu $\frac{(-1)^n}{n!} g(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• Csq : Γ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec les pôles simples $-n$ de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• Th : si $f \in \mathcal{H}(\Pi_0)$ vérifie (EF) et est bornée sur $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$, alors $f = \lambda \Gamma$ avec $\lambda = f(1)$.

⊛ Lemme.

Pour $z \in \Pi_0$ on pose $\tilde{g}(z) = g(z)$. Soit $n \geq 1$: pour $z \in \Pi_{-n} \setminus (\Pi_{1-n} \cup \{1-n\})$ on pose (car $z+n \in \Pi_0$ et $z \notin -\mathbb{N}$)
$\tilde{g}(z) = \frac{g(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$. Cela déf $\tilde{g}$ sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, qui prolonge g par déf.



Mq $\tilde{g}$ est holomorphe. À partir de (EF) on obtient par récurrence que, pour tous $n \geq 1$ et $z \in \Pi_0$, $g(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\, g(z)$. En particulier si on fixe un $n \geq 1$, pour tout $z \in \Pi_{-n} \setminus -\mathbb{N}$ on a
$\tilde{g}(z) = \frac{g(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$. Donc $\tilde{g} \in \mathcal{H}(\Pi_{-n} \setminus -\mathbb{N})$. On conclut par réunion.

Enfin soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \Pi_{-n-1} \setminus -\mathbb{N}$, $\tilde{g}(z) = \frac{g(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$. On a donc un pôle simple en $-n$, de résidu : $\operatorname{Res}_{\tilde{g}}(-n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\tilde{g}(z) = \lim_{z \to -n} \frac{g(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{g(1)}{(-n)(1-n)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} g(1)$. □

⊛ Csq.

On sait que Γ vérifie (EF) et que $\Gamma(1) = 1$: on a le résultat. □

⊛ Th.

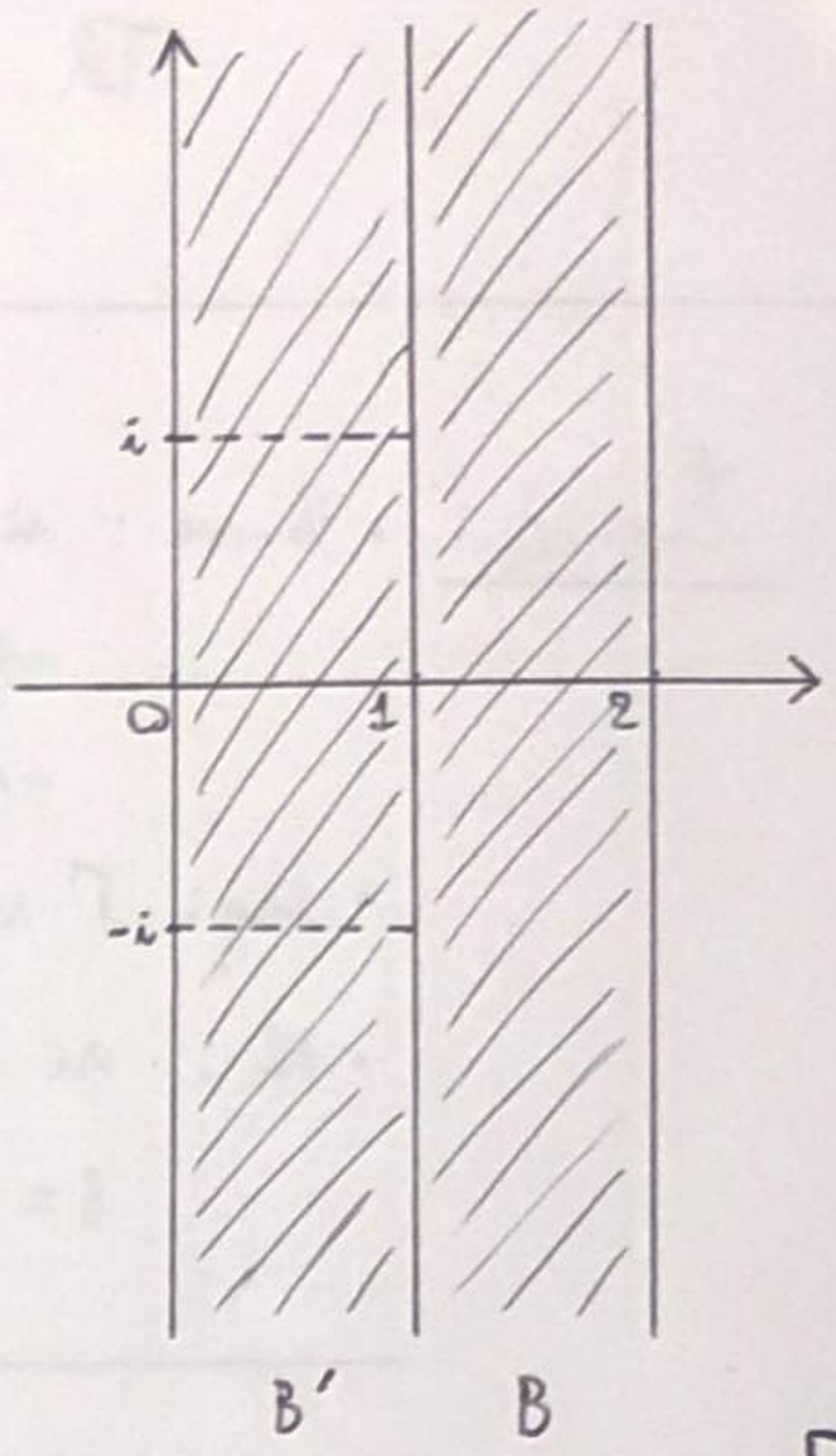
Soit f vérifiant les hypothèses : on pose $g = f - \lambda\Gamma$ avec $\lambda = f(1)$. g vérifie encore (EF) donc on peut lui appliquer le lemme. Or $g(1) = f(1) - f(1)\Gamma(1) = 0$ donc les résidus sont nuls et g se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}$.

Γ est bornée, f aussi par hyp donc g l'est encore. On note $B' = B - 1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z < 1\}$.
g est bornée sur B' : en effet d'une part $B' \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$ est compact et g est continue donc bornée dessus ; d'autre part si $z \in B'$ avec $|\operatorname{Im} z| > 1$, $g(z) = \frac{g(z+1)}{z}$: vu que g est bornée sur B et que l'on a exclu le voisinage de 0, g est bornée sur $B' \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| > 1\}$.

Finalement on pose $h : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto g(z)\, g(1-z) \end{cases}$: $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. g et $z \mapsto g(1-z)$ sont bornées sur B' donc h également. Mais pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$h(z+1) = g(z+1)\, g(-z) = z\, g(z) \cdot \dfrac{g(1-z)}{-z} = -g(z)\, g(1-z) = -h(z)$.

Par 1-périodicité de $|h|$ et vu que $\mathbb{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + B')$, la borne se propage : h est bornée sur $\mathbb{C}$. Le th de Liouville donne h constante, et nulle puisque $h(0) = g(0)\, g(1) = 0$. Par intégrité de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, $g = 0$ ou $(z \mapsto g(1-z)) = 0$, càd $g = 0$; d'où $f = \lambda \Gamma$.



$\square$

<u>Réf</u> : Remmert, Classical topics in complex function theory : p 43.

↳ Dans Remmert : preuve th mais pas preuve lemme : bien retenir les étapes (simple).

↳ Noter (EF) l'équation fonctionnelle pour ne pas la réécrire à chaque fois.

↳ Définir $\Pi_\sigma = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \sigma \}$ pour $\sigma \in \mathbb{R}$.

↳ Mettre dans le plan la déf de Γ, que Γ vérifie (EF), que $\Gamma(1) = 1$ et que $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(\operatorname{Re} z)$ pour $z \in \Pi_0$. Facile à voir $\left(|\Gamma(z)| = \left| \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \right| \leq \int_0^\infty t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}\, dt = \Gamma(\operatorname{Re} z) \right)$, et entraîne que Γ bornée sur B (pour $z \in B$, $|\Gamma(z)| \leq \max_{1 \leq x \leq 2} \Gamma(x)$).