# Théorème de Muntz

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit du produit scalaire usuel. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Par abus de notation, $x^n$ désignera $x \longmapsto x^n$.

<u>Théorème:</u> La famille $(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

<u>Lemme 1 (déterminant de Cauchy):</u> Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ des réels strictement positifs. Alors
$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}.$$

<u>Démonstration:</u> On suppose les $a_i$ deux à deux distincts, sans quoi l'égalité est directement vérifiée. On fixe $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{R}$ tels que :
$$R(X) = \frac{(b_1-X)\dots(b_{n-1}-X)}{(X+a_1)\dots(X+a_n)} = \frac{d_1}{X+a_1}+\dots+\frac{d_n}{X+a_n}.$$

Pour tout $k$, on a $d_k = \dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i+a_k)}{\prod_{i\neq k}(a_i-a_k)} \neq 0$. On note $L_1,\dots,L_n$ les lignes de $\Delta_n := \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. On a :
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} L_1\\ \vdots \\ L_n\end{vmatrix} = \frac{1}{d_n}\begin{vmatrix} L_1\\ \vdots \\ L_{n-1} \\ \sum_{i=1}^n d_i L_i\end{vmatrix} = \frac{1}{d_n}\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n)\end{vmatrix}$$

Comme $R(b_i)=0$ pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, le développement selon la dernière ligne de $\Delta_n$ donne
$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{d_n}\Delta_{n-1} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i-b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n+a_i)}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i+a_n)}\,\Delta_{n-1}.$$

Par récurrence, et comme $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$, on a :

$$\Delta_m = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i) \cdot \prod_{i<j} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

<u>Lemme 2</u> : Soient $E$ un espace préhilbertien, $V$ un sous-espace de $E$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_m)$. Soit $x \in E$. Alors la distance $d$ de $x$ à $V$ vérifie :

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_m, x)}{G(e_1, \dots, e_m)}$$

<u>Démonstration</u> : On a $d = \|z\|$, où $z = x - y$ et $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $V$. On a, pour tout $i$, $e_i \cdot y = e_i \cdot x$, et $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

On a $G(e_1, \dots, e_m, x) = \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_m & e_1 \cdot x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_m \cdot e_1 & \cdots & e_m \cdot e_m & e_m \cdot x \\ x \cdot e_1 & \cdots & x \cdot e_m & x \cdot x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_m & e_1 \cdot y \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_m \cdot e_1 & \cdots & e_m \cdot e_m & e_m \cdot y \\ y \cdot e_1 & \cdots & y \cdot e_m & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{vmatrix}$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_m & e_1 \cdot y \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_m \cdot e_1 & \cdots & e_m \cdot e_m & e_m \cdot y \\ y \cdot e_1 & \cdots & y \cdot e_m & \|y\|^2 \end{vmatrix}}_{= 0 \text{ car } y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)} + \underbrace{\begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_m & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_m \cdot e_1 & \cdots & e_m \cdot e_m & 0 \\ y \cdot e_1 & \cdots & y \cdot e_m & \|z\|^2 \end{vmatrix}}_{= \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_m)}$$

$$= \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_m)$$

$$= d^2 \; G(e_1, \dots, e_m)$$

Ceci permet de conclure.

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_N = \underset{1 \leq i \leq N}{\mathrm{Vect}} (x^{\alpha_i})$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{R}_+$.

On pose $\Delta_N(m) = \inf_{f \in E_N} \| x^m - f \|_2$. Alors $\Delta_N(m) = \dfrac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N} \left| \dfrac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|$.

<u>Démonstration</u> : Par le lemme 2, on a $\Delta_N(m)^2 = \dfrac{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}, x^m)}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}$.

Soient $r_1, \dots, r_m$ des réels positifs.

On a $\langle x^{p_i}, x^{p_j}\rangle = \dfrac{1}{a_i+b_j}$ avec $a_i = p_i$ , $b_j = p_j+1$ .

Donc $G(x^{p_1},\dots,x^{p_m}) = \dfrac{\prod_{i<j}(p_i-p_j)^2}{\prod_{i,j}(p_i+p_j+1)}$ .

On a alors $G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N},x^{m}) = \dfrac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \prod_{i=1}^{N}(\alpha_i-m)^2}{(2m+1)\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)\prod_{i=1}^{N}(\alpha_i+m+1)^2}$

$$G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N}) = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)}$$

d'où $\Delta_N(m) = \dfrac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{N}\left|\dfrac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right|$ .

## Démonstration du théorème :

• $\Rightarrow$ : On suppose que $(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}$.

Soit $m>0$ tel que $\alpha_n \neq m$ pour tout $n$. La fonction $x^m$ appartient à $\overline{E} = \mathcal{C}$, donc la suite $(\Delta_N(m))_{N\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $0$, ce qui donne, par lemme 3, $\lim_{N\to+\infty}\prod_{i=1}^{N}\left|\dfrac{\alpha_i-m}{\alpha_i+m+1}\right| = 0$.

- Si la suite $(\alpha_n)$ est majorée, la série $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

- Si $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on fixe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\alpha_n > m$ pour tout $n \geq N_0$.

Alors, pour tout $n\geq N_0$, on a $u_n = \ln\left(\dfrac{\alpha_n-m}{\alpha_n+m+1}\right) = \ln\left(1-\dfrac{2m+1}{\alpha_n+m+1}\right) \sim -\dfrac{2m+1}{\alpha_n}$,

donc $\sum_{n\geq N_0} u_n$ diverge, donc $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

• $\Leftarrow$ : on suppose que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Par Weierstrass, il suffit de montrer que $x^m \in \overline{E}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$.

Soit $m\in\mathbb{N}$.

- Si la suite $(\alpha_m)$ est majorée, on a $\lim\limits_{N \to +\infty} \prod\limits_{i=1}^{N} \left( \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right) = 0$,

donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \Delta_N(m) = 0$, donc $x^m \in \overline{E}$.

- Sinon, $\alpha_m \longrightarrow +\infty$, auquel cas l'équivalent $u_m \sim -\frac{2m+1}{\alpha_m}$ est valable et

donne $\sum u_m$ diverge vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \prod\limits_{i=1}^{N} \left( \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right) = 0$, et on

conclut de la même manière.

Si la suite $(\alpha_n)$ est majorée, et que l'on pose $C = \sup \alpha_n$,

on fixe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait $\alpha_n > C - 1$.

Pour de tels $n$, on a $\left| \frac{\alpha_n - m}{\alpha_n + m + 1} \right| < \frac{C + m}{\alpha_n + m + 1} \leq \frac{C + m}{\alpha_{N_0} + m + 1} < 1$.

D'où $\left| \prod\limits_{i=N_0}^{N} \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right| \leq \left( \frac{C + m}{\alpha_{N_0} + m + 1} \right)^{N - N_0 + 1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$,

ce qui donne $\prod\limits_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.