Leçons : 205, 234, 241.

Th de Riesz-Fischer

Énoncés : • lemme : E un evn. E est de Banach ssi toute série absolument convergente converge.

• th : pour un espace mesuré donné et $1 \leq p \leq \infty$, L^p est un espace de Banach.

⊗ Lemme.

⇐ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy : mq converge.

Soit φ une extraction tq pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$; c'est possible car x est de Cauchy : on prend $\varphi(0)$ tq pour $k \geq \varphi(0)$, $\|x_k - x_{\varphi(0)}\| \leq 1$, puis pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tq pour $k \geq \varphi(n+1)$, $\|x_k - x_{\varphi(n+1)}\| \leq 2^{-n-1}$.

Alors par comparaison la série $\sum_n (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ converge absolument, donc converge par hypothèse. Or $\sum_{n=0}^{N} (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(N+1)} - x_{\varphi(0)}$ par télescopage, et la sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge : x admet une valeur d'adhérence. Puisque elle est de Cauchy, elle converge.

⇒ Soit $\sum_n x_n$ absolument convergente, on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$ la N^e somme partielle.
Pour $M \leq N$ dans $\mathbb{N}$, $\|S_N - S_M\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \|x_n\|$: $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Par hypothèse elle converge, cad que la série converge.

□

⊗ Th. On note $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ et on se place sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

↳ Cas $1 \leq p < \infty$.

On utilise le lemme : soit $\sum_n f_n$ une série absolument convergente dans L^p, cad avec $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$. On peut définir la fonction mesurable $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$, à valeurs dans $[0;\infty]$.

Par le TCM : $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\|_p = \left(\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{1/p} = \lim_{N\to\infty} \left(\int \left(\sum_{n=0}^{N} |f_n| \right)^p d\mu \right)^{1/p} = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} |f_n| \right\|_p$
$\leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_p = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$.

En particulier pour presque tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$. Pour un tel x, la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge absolument donc converge dans $\mathbb{K}$ (qui est de Banach). Cela permet de définir $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Pour $x \in X$ tq $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| = \infty$ on pose $g(x) = 0$ (ou une autre valeur arbitraire).
Par le même calcul que ci-dessus, $\|g\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty$: $g \in L^p$.
Reste à vérifier que $\sum_n f_n$ converge vers g dans L^p. On a $\left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x) - g(x) \right|^p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ pour presque tout $x \in X$, et la domination $\left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x) - g(x) \right|^p \leq \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \right)^p = \left(2^p \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right)^p \right)(x)$ avec $\left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right)^p \right\|_1 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \right\|_p^p < \infty$: le TCD conclut.

↳ Cas $p=\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans L^∞. On pose, pour $m,n\in\mathbb{N}$, $A_n=\{x\in X \mid |f_n(x)|>\|f_n\|_\infty\}$ et $B_{m,n}=\{x\in X\mid |f_m(x)-f_n(x)|>\|f_m-f_n\|_\infty\}$, puis $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} B_{m,n}$ leur réunion.
Par déf de $\|\cdot\|_\infty$ tous ces ensembles sont de mesure nulle. Pour $x\in E$ on pose $g(x)=0$ (ou une autre valeur arbitraire).

Pour $x\notin E$ l'inégalité de Cauchy peut être "évaluée" en x : si $\varepsilon>0$, soit $N\in\mathbb{N}$ tq pour $m,n\geq N$, $\|f_m-f_n\|_\infty\leq\varepsilon$; alors $|f_m(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$. Vu que $\mathbb{K}$ est de Banach, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y converge : on pose $g(x)$ la limite. De plus $|g(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty$.
Ainsi $\|g\|_\infty\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<\infty$; la seconde inégalité venant du fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc bornée dans L^∞. Donc $g\in L^\infty$.

↳ Cas $p=\infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans L^∞. Pour $k\geq 1$ soit $N_k\in\mathbb{N}$ tq pour $m,n\geq N_k$, $\|f_m-f_n\|_\infty\leq\frac{1}{k}$.
On pose alors $E_k\subset X$ de mesure nulle tq si $x\in X\setminus E_k$, pour $m,n\geq N_k$ on a $|f_m(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{k}$.
Alors $E=\bigcup_{k\geq 1}E_k$ est encore de mesure nulle, et pour $x\in X\setminus E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$: on pose $g(x)$ sa limite, par complétude de $\mathbb{K}$. Pour $x\in E$ on pose $g(x)=0$ (ou une autre valeur arbitraire).

Vérifions que $g\in L^\infty$. Pour $x\in X\setminus E$ et $k\geq 1$: on passe à la limite en m pour obtenir, pour $n\in\mathbb{N}$: $|g(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{k}$, puis $|g(x)|\leq|f_n(x)|+\frac{1}{k}\leq\|f_n\|_\infty+1\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty+1$ (pour presque tout x par déf de $\|\cdot\|_\infty$). Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc bornée dans L^∞, et $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<\infty$. Donc $g\in L^\infty$.
Reste à mq $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty}g$. L'inégalité $|g(x)-f_n(x)|\leq\frac{1}{k}$ donne $\|g-f_n\|_\infty\leq\frac{1}{k}$, où $n\geq N_k$: il y a convergence uniforme : $\|g-f_n\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

$\square$

<u>Réf</u> : • Briane / Pagès, Théorie de l'intégration : p 143 (lemme + cas $1\leq p<\infty$), p 152 (cas $p=\infty$).
• Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications : p 57 (cas $p=\infty$).

↳ Le cas $1\leq p<\infty$ utilise le lemme, le cas $p=\infty$ non.

↳ Corollaire de la preuve ($p<\infty$) : toute suite convergente dans L^p admet une sous-suite convergente simplement pp (avant de mq cette CV est encore vraie dans L^p par le TCD).
En effet on mq la série $\sum f_n$ CVS pp or en reprenant la preuve du lemme, cela correspond par télescopage à la CVS pp d'une sous-suite d'une suite de Cauchy (a posteriori : convergente) de L^p.