Projection sur un convexe fermé

Leçons : 205, 208, 213, 219, 253.

Énoncés : • th 1 (projection sur un convexe fermé) : H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ convexe fermé. Pour tout $x \in H$ il existe un unique $y \in C$ minimisant la distance $\|x-z\|$ pour $z \in C$; il est caractérisé par $y \in C$ et $\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$. On le note $p_C(x)$. L'application $p_C : H \to C$ est alors 1-lipschitzienne.

• prop : si F est un sev fermé de H, $H = F \oplus F^\perp$ et p_F est le projecteur orthogonal sur F.

• th 2 (représentation de Riesz) : $\begin{cases} H \to H' \\ y \mapsto \langle \cdot, y\rangle \end{cases}$ est un isomorphisme isométrique.

⊗ Th 1.

• On commence par l'existence.

Notons $d = \inf_{z \in C} \|x-z\|$ et prenons $y_n \in C$ tq $\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$. Mq $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$: on applique l'identité du parallélogramme à $x-y_m$ et $x-y_n$:

$$\|(x-y_m)+(x-y_n)\|^2 + \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2 = 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\|x-y_m\|^2 + 2\|x-y_n\|^2 - 4d^2$$

car $\frac{y_m+y_n}{2} \in C$ et $\|x - \frac{y_m+y_n}{2}\| \geq d$. Puisque $\|x-y_n\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} d^2$, en prenant m, n assez grands la quantité ci-dessus est aussi petite que voulu.

Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ; H étant complet elle admet une limite y. Par fermeture de C, $y \in C$.

Par continuité on a $\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d$.

• On montre ensuite la caractérisation.

D'abord sq y minimise la distance à C. Soit $z \in C$. Pour $0 < t \leq 1$, $(1-t)y + tz \in C$ donc $\|x-y\|^2 \leq \|x-(1-t)y-tz\|^2 = \|(x-y)-t(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2t\langle x-y, z-y\rangle + t^2\|z-y\|^2$, et $\langle x-y, z-y\rangle \leq \frac{t}{2}\|z-y\|^2$. Pour $t \to 0$ on obtient $\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$.

Réciproquement si $y \in C$ est tq $\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$ on a, pour $z \in C$:

$\|x-z\|^2 = \|(x-y)-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\langle x-y, z-y\rangle + \|z-y\|^2 \geq \|x-y\|^2$, d'où $\|x-y\| \leq \|x-z\|$.

• Enfin on montre du même coup le caractère 1-lip et l'unicité.

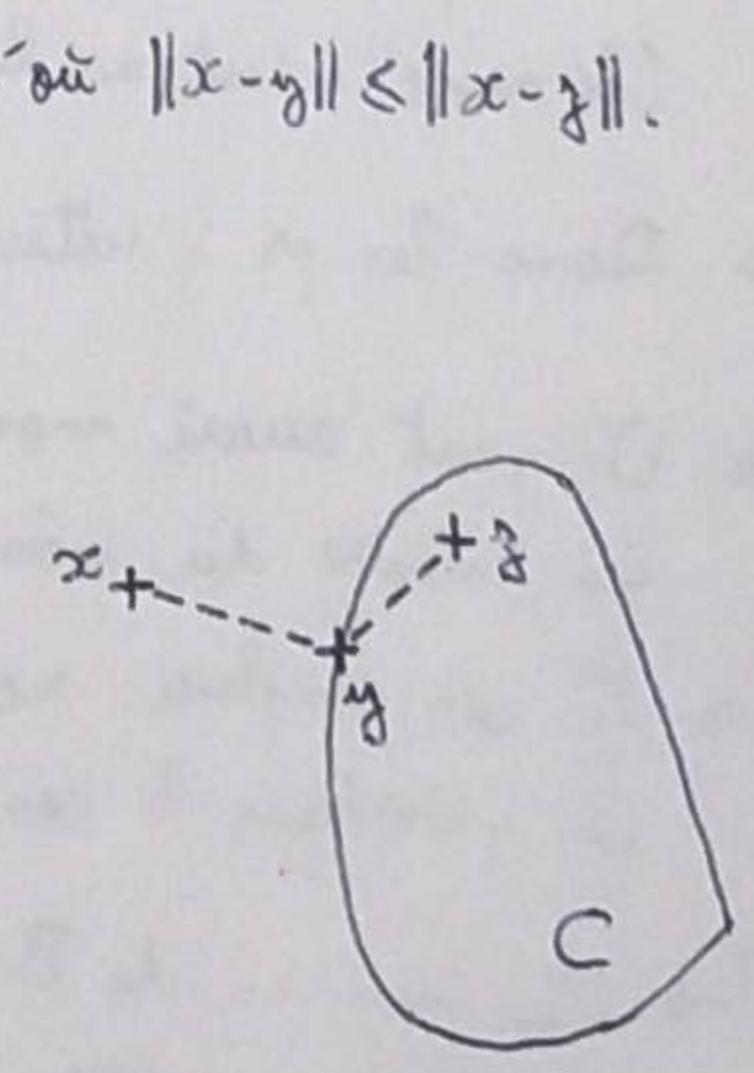
Soient $x, x' \in H$, $y \in C$ un projeté de x, $y' \in C$ un projeté de x'.

En appliquant la caractérisation en y' et y on obtient

$\langle x-y, y'-y\rangle \leq 0$ et $\langle x'-y', y-y'\rangle \leq 0$. On somme les deux :

$\langle (y-x)+(x'-y'), y-y'\rangle = \langle y-y', y-y'\rangle + \langle x'-x, y-y'\rangle$

est négatif. Autrement dit :



$\|y-y'\|^2 = \langle y-y', y-y'\rangle \leq \langle x-x', y-y'\rangle \leq \|x-x'\|\cdot\|y-y'\|$ par C-S.

Finalement $\|y-y'\| \leq \|x-x'\|$.

Avec $x'=x$ cela prouve l'unicité du projeté. Mtn que p_C est bien déf, on peut de plus réécrire $\|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \|x-x'\|$. □

⊗ **Prop.**

- Si $x \in F \cap F^\perp$, $\langle x, x\rangle = 0$ et $x=0$: $F\cap F^\perp = \{0\}$.

  Soit $x \in H$. On note $y = p_F(x)$: $x = y + x - y$. Mq $x-y \in F^\perp$. Soit $z\in F$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, d'après la caractérisation de y on a $\langle x-y, \lambda z - y\rangle \leq 0$ et donc $\lambda\langle x-y, z\rangle \leq \langle x-y, y\rangle$. Ceci impose $\langle x-y, z\rangle = 0$. On a bien $H = F + F^\perp$.

- Ce qui précède mq si $y\in F$ et $z \in F^\perp$, $p_F(y+z) = y$: c'est la déf du projecteur (linéaire) orthogonal sur F. En particulier celui ci est continu. □

⊗ **Th 2.**

- Notons $\phi : \begin{cases} H \to H' \\ y \mapsto \langle \cdot, y\rangle \end{cases}$: il est clair que ϕ est linéaire et injective. Il s'agit de mq elle est surjective et que c'est une isométrie.

- Soit $f\in H'$. Si $f=0$, $f = \phi(0)$; sinon soit $F = \operatorname{Ker} f \subsetneq H$. C'est un sev fermé de H, et d'après la prop ci-dessus $F^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in F^\perp\setminus\{0\}$: F est un hyperplan donc $H = F \oplus \mathbb{R}x$. On pose $\lambda = \frac{f(x)}{\|x\|^2} \neq 0$: d'une part f comme $\phi(\lambda x)$ sont nulles sur F ; d'autre part $\phi(\lambda x)(x) = \langle x, \lambda x\rangle = \frac{f(x)}{\|x\|^2}\|x\|^2 = f(x)$. f et $\phi(\lambda x)$ coïncident donc sur H et $f = \phi(\lambda x)$.

- Soit $y \in H$. Si $x\in H$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ par C-S donc $\|\phi(y)\| \leq \|y\|$. Réciproquement $\langle y, y\rangle = \|y\|^2$ donc $\|\phi(y)\| \geq \|y\|$. □

Réf : • Brézis – Analyse fonctionnelle : p 79 (th 1).
• Skandalis – Topologie et analyse : p 252 (prop, th 2).

↳ Si trop long, ne pas faire le th de représentation de Riesz, ou ne faire que la surjectivité (le reste n'est pas lié à la projection sur un convexe fermé).

↳ Dans les ps : attention aux chgts de signes ! Surtout quand on montre ou utilise la caractérisation.

↳ On peut aussi montrer l'unicité du projeté par stricte convexité de $\|\cdot\|$. La méthode choisie ici montre du même coup que p_C est 1-lip.

↳ Le cas complexe se démontre essentiellement pareil, avec quelques parties réelles qui apparaissent. On privilégie le cas réel pour la clarté et l'efficacité.

↳ Les preuves de Brézis pour le th 1 et de Skandalis pour la prop et le th 2 sont bien, mais les trois résultats sont prouvés dans à peu près tous les livres d'analyse fonctionnelle.