Leçons : 204, 241, 245.

Version faible du th de Runge

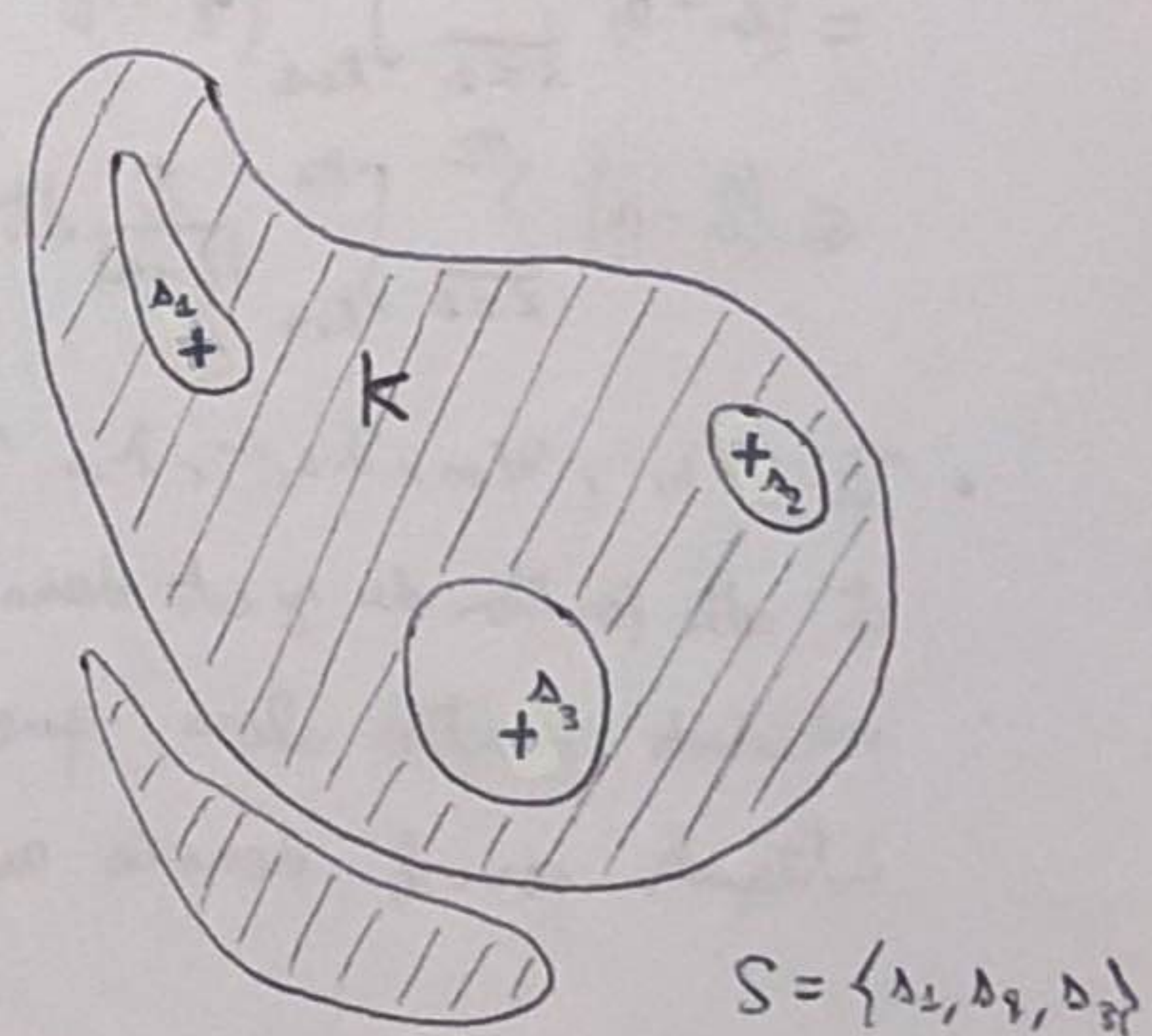
Énoncé : Soient $K \subset \mathbb{C}$ compact et $S \subset \mathbb{C}$ rencontrant toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus K$. Pour tout $a \in \mathbb{C}\setminus K$, $\begin{cases} K \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z-a} \end{cases}$ est limite uniforme de fractions rationnelles de pôles dans S.

Preuve.

- On munit $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (topologie de la CV uniforme). On note $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$ l'ens des fractions rationnelles de pôles dans S, vues comme fonctions de K dans $\mathbb{C}$. On considère son adhérence $\overline{\mathcal{F}}$, qui est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$. En effet si $F, G \in \overline{\mathcal{F}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on écrit $F = \lim_{n\to\infty} F_n$ et $G = \lim_{n\to\infty} G_n$ avec $F_n, G_n \in \mathcal{F}$. On a $\lambda F_n + G_n$ et $F_n G_n$ dans $\mathcal{F}$, donc en passant à la limite, $\lambda F + G$ et FG sont dans $\overline{\mathcal{F}}$.
  Pour $a \in \mathbb{C}\setminus K$ on note $\varphi_a : \begin{cases} K \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z-a} \end{cases}$: $\varphi_a \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$. En notant $A = \{a \in \mathbb{C}\setminus K \mid \varphi_a \in \overline{\mathcal{F}}\}$, il s'agit de mq $A = \mathbb{C}\setminus K$. On raisonne par connexité : on mq A est un ouvert fermé de $\mathbb{C}\setminus K$ qui rencontre chacune de ses composantes connexes.

- Mq A rencontre chaque CC de $\mathbb{C}\setminus K$.
  D'abord $S \subset A$ (c'est trivial : si $a \in S$, $\varphi_a \in \mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$) donc A rencontre toutes les CC bornées de $\mathbb{C}\setminus K$.
  Reste celle qui est non bornée. Soient $R = \max_{z\in K} |z|$ et $|a| > R$: pour $z \in K$,
  $\varphi_a(z) = \frac{1}{z-a} = -a^{-1}\frac{1}{1-z/a} = -a^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z/a)^n$. Cette série entière a pour rayon de CV $|a| > R$ donc CVN sur K : φ_a est limite uniforme de polynômes (donc d'éléments de $\overline{\mathcal{F}}$).
  Ainsi a est dans l'intersection de A et de la CC non bornée de $\mathbb{C}\setminus K$.

- Mq A est fermée dans $\mathbb{C}\setminus K$.
  Soient $a_n \in A$ tq $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{C}\setminus K$. On pose $d = d(a,K) > 0$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour $n \geq N$, $|a_n - a| \leq d/2$. Soit $z \in K$: $d \leq |z-a| \leq |z-a_n| + |a_n - a| \leq |z-a_n| + d/2$ donc $|z-a_n| \geq d/2$. Alors :
  $$\left|\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{(z-a_n)(z-a)}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{d/2 \cdot d}, \text{ d'où}$$
  $\|\varphi_{a_n} - \varphi_a\|_\infty \leq \frac{2}{d^2}|a_n - a|$: $\varphi_a = \lim_{n\to\infty} \varphi_{a_n} \in \overline{\mathcal{F}}$.
  Donc $a \in A$.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$

• Mq A est ouverte dans $\mathbb{C}\setminus K$.

Soient $a \in A$, $d = d(a,K) > 0$ et $h \in D(0, d/2)$. Si $z \in K$, $\varphi_{a+h}(z) = \frac{1}{z-a-h}$ $= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-h/(z-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}$. Mais $\left|\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{(d/2)^n}{d^{n+1}} = \frac{1}{2^n d}$, ce qui est le terme d'une série convergente : la série précédente CVN et $\varphi_{a+h} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \varphi_a^{n+1}$. Puisque $\overline{\mathcal{F}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$, $\sum_{n=0}^{N} h^n \varphi_a^{n+1} \in \overline{\mathcal{F}}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et $\varphi_{a+h} \in \overline{\mathcal{F}}$. On a donc comme attendu $D(a, d/2) \subset A$.

$\square$

<u>Complément :</u> version forte (preuve partielle).

Soient $K \subset \mathbb{C}$ compact et $S \subset \mathbb{C}$ rencontrant toutes les composantes connexes bornées de $\mathbb{C}\setminus K$. Si Ω est un voisinage ouvert de K et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, f est limite uniforme de fractions rationnelles de pôles dans S.

Preuve (partielle).

• On <u>admet</u> qu'il existe des chemins-segments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de $\Omega\setminus K$ tq pour tout $z \in K$,
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

• Approximation des intégrales par des sommes de Riemann : soit $\gamma = [a;b]$ comme ci-dessus, soit $\varepsilon > 0$. On mq il existe $w_1, \dots, w_m \in \gamma([0,1])$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tq pour tout $z \in K$,
$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{w_i - z} \right| \leq \varepsilon.$$

Notons $g(t,z) = \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $z \in K$: g est continue sur le compact $[0,1]\times K$ donc uniformément continue. On prend $\eta > 0$ tq si $|t-t'| \leq \eta$ alors pour tout $z \in K$, $|g(t,z) - g(t',z)| \leq \frac{\varepsilon}{|b-a|}$. On fixe alors $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1$ tq $|t_i - t_{i-1}| \leq \eta$ pour $1 \leq i \leq m$. On pose $w_i = \gamma(t_i)$ et $\lambda_i = (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\, f(\gamma(t_i))$ $= (b-a)(t_i - t_{i-1})\, f(\gamma(t_i))$.

Alors pour $z \in K$, $\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{w_i - z} = \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (b-a)\, g(t,z)\, dt - (b-a)(t_i - t_{i-1})\, g(t_i,z) \right)$ $= (b-a) \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g(t,z) - g(t_i,z))\, dt$, et $|\cdots| \leq |b-a| \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |g(t,z) - g(t_i,z)|\, dt$ $\leq |b-a| \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\varepsilon}{|b-a|}\, dt = \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} 1\, dt = \varepsilon.$

• Si $w_1, \dots, w_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont comme précédemment, pour $z \in K$ $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{w_i - z} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}(z)$ et cette fonction de z est dans $\overline{\mathcal{F}}$ d'après la version faible du th de Runge. L'approximation précédente assure alors que $z \mapsto \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ est également dans $\overline{\mathcal{F}}$. Enfin la formule intégrale pour f donnée au début de la preuve montre que $f \in \overline{\mathcal{F}}$.

$\square$

Réf : • Queffélec - Topologie : p 124 (version faible).

• Tauvel - Analyse complexe : p 169 (version forte).

↳ Puisque $\bar{F}$ est une algèbre, dans la version faible on pourrait remplacer φ_a par toute fraction rationnelle sans pôles dans K.

↳ On utilise que si A est ouvert fermé dans $\mathbb{C} \setminus K$ et rencontre toutes ses CC alors $A = \mathbb{C} \setminus K$. En effet si C est une CC de $\mathbb{C} \setminus K$, $A \cap C$ est alors un ouvert fermé non vide du connexe C, donc $A \cap C = C$ et $C \subset A$.

↳ La formulation donnée ici est un peu plus générale que celle de Queffélec, mais la preuve est la même. On retrouve cette formulation en supposant $\mathbb{C} \setminus K$ connexe et en prenant $S = \emptyset$.

↳ L'idée de la preuve de la version forte est donnée dans Queffélec, et la preuve est dans Tauvel. On ne détaille pas la construction des segments $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, mais l'idée est de quadriller le plan assez finement et d'extraire des segments de $\Omega \setminus K$ qui entourent K. Les segments peuvent être regroupés en lacets entourant les CC de K, et la formule intégrale est alors une application de la formule de Cauchy homotopique.

↳ Dans Tauvel il y a une erreur dans l'approximation par les sommes de Riemann : à la fin, $\dfrac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ est remplacé par $\gamma'(t)$. Pour rendre cela vrai on part directement de γ segment (les deux valent alors $b-a$).

↳ S'il reste du temps à la fin de la preuve de la version faible, exposer l'idée de la preuve de la version forte (en particulier la fin du complément). Par ailleurs la version forte peut figurer dans le plan pourvu que la formule intégrale soit mentionnée en lemme et explicitement admise.

↳ La preuve n'est pas constructive.