Leçons : 201, 213, 234, 236, 239, 250.

Base hilbertienne de polynômes orthogonaux

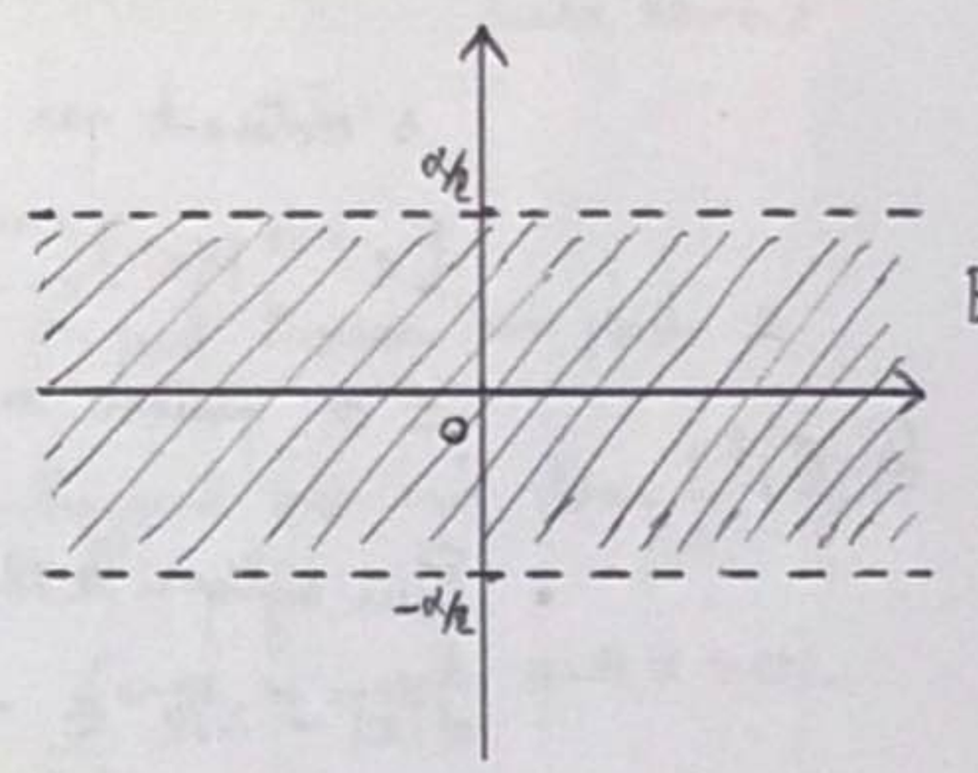
Énoncé : Soit ρ une fonction de poids sur I. Si il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx<\infty$, alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ est, à normalisation près, une base hilbertienne de $(L^2(I,\rho), \langle\cdot,\cdot\rangle_\rho)$.

Preuve.

Pour F sev d'un espace de Hilbert, F est dense ssi $F^\perp=\{0\}$. On veut donc montrer que, en notant $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ : $(\mathrm{Vect}\{P_n;\, n\in\mathbb{N}\})^\perp=\{0\}$, cad $(\mathrm{Vect}\{X^n;\, n\in\mathbb{N}\})^\perp=\{0\}$. Soit $f\in(\mathrm{Vect}\{X^n;\, n\in\mathbb{N}\})^\perp$.

On pose $g=\mathbb{1}_I\cdot f\cdot\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pour $x\in I$, $|g(x)|=|f(x)|\rho(x)\le\frac12(1+|f(x)|^2)\rho(x)$ (en effet si $t\in\mathbb{R}$, $0\le(t-1)^2=t^2-2t+1$ et $t\le\frac12(1+t^2)$). Or $1\in L^2(I,\rho)$ donc $\rho\in L^1(I,1)$, et $f\in L^2(I,\rho)$ donc $|f|^2\rho\in L^1(I,1)$: $g\in L^1(I)$. Comme $g|_{\mathbb{R}\setminus I}=0$, $g\in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat g:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}g(x)\,dx\end{cases}$. Par injectivité de la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, si on montre que $\hat g=0$ on aura $g=0$, et donc $f=0$.

On pose $B_\alpha=\{z\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}\,z|<\frac{\alpha}{2}\}$: c'est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$. On veut prolonger $\hat g$ à B_α. On va mq la fonction



$G:\begin{cases}B_\alpha\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-izx}g(x)\,dx\end{cases}$ est bien définie et holomorphe grâce au th d'holomorphie sous l'intégrale (on aura bien $G|_{\mathbb{R}}=\hat g$). On constate que pour $z\in B_\alpha$, $x\mapsto e^{-izx}g(x)$ est mesurable et que pour $x\in\mathbb{R}$, $z\mapsto e^{-izx}g(x)$ est holomorphe sur B_α. Reste à montrer la domination.

~~On peut donc définir $G:\begin{cases}B_\alpha\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_I e^{-izx}g(x)\,dx\end{cases}$, et on a $G|_{\mathbb{R}}=\hat g$.~~

~~Nous allons montrer que $G\in\mathcal{H}(B_\alpha)$. Pour cela on applique le th d'holomorphie sous l'intégrale : vérifions les hypothèses. D'abord pour tout $z\in B_\alpha$, $x\mapsto e^{-izx}g(x)$ est mesurable~~

~~Pour $z\in B_\alpha$ et $x\in I$: $|e^{-izx}g(x)|=e^{\mathrm{Re}(-izx)}|f(x)|\rho(x)=e^{\mathrm{Im}\,z\cdot x}|f(x)|\rho(x)\le e^{|\mathrm{Im}\,z\cdot x|}|f(x)|\rho(x)\le e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)$.~~

Pour $z\in B_\alpha$ et $x\in\mathbb{R}$: $|e^{-izx}|=e^{\mathrm{Re}(-izx)}=e^{\mathrm{Im}\,z\cdot x}\le e^{|\mathrm{Im}\,z\cdot x|}\le e^{\frac{\alpha}{2}|x|}$. Ainsi $|e^{-izx}g(x)|\le e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|g(x)|$.
Or cette fonction est dans $L^1(\mathbb{R})$: en effet $\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|g(x)|\,dx=\int_I e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)\,dx\le\left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_I|f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{1/2}$ par C-S pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$. Le facteur gauche est $<\infty$ par hyp ; le droit car $f\in L^2(I,\rho)$.

On peut maintenant appliquer le th d'holomorphie sous l'intégrale : G est bien déf et holomorphe sur B_α, et pour $n\in\mathbb{N}$ et $z\in B_\alpha$: $G^{(n)}(z)=\int_{\mathbb{R}}(-ix)^n e^{-izx}g(x)\,dx=(-i)^n\int_I x^n e^{-izx}f(x)\rho(x)\,dx$. En particulier $G^{(n)}(0)=(-i)^n\int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx=(-i)^n\langle X^n,f\rangle_\rho=0$ par déf de f.

L'unicité du développement en série entière donne la nullité de G au voisinage de 0 ; alors par le principe des zéros isolés, $G = 0$. En particulier $\hat{g} = 0$, $g = 0$ et $f = 0$ comme annoncé. $\square$

<u>Complément 1 : exemple :</u> Polynômes de Hermite. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$ pour $n \in \mathbb{N}$ donne la famille de polynômes orthogonaux pour $I = \mathbb{R}$, $\rho : x \mapsto e^{-x^2/2}$. De plus le th démontré ici s'applique.

Preuve. • Mq $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille de polynômes orthogonaux pour $I = \mathbb{R}$, $\rho : x \mapsto e^{-x^2/2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}) = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x)$. Ainsi $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2/2}) = (-1)^n(-x)e^{-x^2/2} H_n(x) + (-1)^n e^{-x^2/2} H_n'(x)$; par l'expression précédente, en multipliant par $(-1)^{n+1} e^{-x^2/2}$ on obtient :

$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_n'(x)$.

On montre par réc sur $n \in \mathbb{N}$ que H_n est polynomiale unitaire de degré n. D'abord $H_0(x) = e^{x^2/2} \cdot e^{-x^2/2} = 1$. Ensuite si c'est vrai pour H_n, alors H_n' est de degré $n-1$ (ou $-\infty$ si $n=0$) donc par la formule qui précède, H_{n+1} est polynomiale unitaire de degré $n+1$.

On prend maintenant $m > n$ dans $\mathbb{N}$ et on calcule : $\langle H_m, H_n \rangle_\rho = \int_\mathbb{R} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2/2} dx$
$= \int_\mathbb{R} (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2/2}) \cdot H_n(x)\, dx = (-1)^{m-n} \int_\mathbb{R} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(e^{-x^2/2}) \cdot H_n^{(n)}(x)\, dx$, la dernière égalité s'obtenant par n IPP où l'on primitive à gauche et dérive à droite (car pour P un polynôme, $[e^{-x^2/2} P(x)]_{x\to-\infty}^{x\to\infty} = 0$). Vu que $H_n^{(n)} = n!$ cela donne $\langle H_m, H_n \rangle_\rho = (-1)^{m-n} n! \int_\mathbb{R} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}(e^{-x^2/2}) dx$
$= 0$ puisque $m - n \geq 1$.

• Pour appliquer le th il suffit de trouver $\alpha > 0$ tq $\int_\mathbb{R} e^{\alpha|x|} e^{-x^2/2} dx < \infty$. En fait pour tout $\alpha > 0$ on a $\alpha|x| - x^2/2 \leq -x^2/4$ pour $|x|$ assez grand, cad $e^{\alpha|x|} e^{-x^2/2} \leq e^{-x^2/4}$. Mais $\int_\mathbb{R} e^{-x^2/4} dx < \infty$, d'où le résultat. $\square$

<u>Complément 2 : contre-exemple :</u> $I = \mathbb{R}_+^*$, $\rho : x \mapsto e^{-(\ln x)^2}$, $f : x \mapsto \sin(2\pi \ln(x))$ fournit un contre-exemple : $f \notin \overline{\mathrm{Vect}\{X^n ; n \in \mathbb{N}\}}$.

Il suffit de mq pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle f, X^n \rangle_\rho = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$: $\langle f, X^n \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}_+^*} \sin(2\pi \ln(x))\, x^n e^{-(\ln x)^2} dx$
$= \int_\mathbb{R} \sin(2\pi y)\, e^{ny} e^{-y^2} \cdot e^y dy$ par le chgt de var $y = \ln(x)$. Cela se réécrit encore $\int_\mathbb{R} \sin(2\pi y)\, e^{(n+1)y - y^2} dy$
$= \int_\mathbb{R} \sin(2\pi y)\, e^{(\frac{n+1}{2})^2 - (y - \frac{n+1}{2})^2} dy = \int_\mathbb{R} \sin\left(2\pi(u + \frac{n+1}{2})\right) e^{(\frac{n+1}{2})^2 - u^2} du = (-1)^{n+1} e^{(\frac{n+1}{2})^2} \int_\mathbb{R} \sin(2\pi u)\, e^{-u^2} du$
par le chgt de var $u = y - \frac{n+1}{2}$. Mais alors $u \mapsto \sin(2\pi u)$ est impair et $u \mapsto e^{-u^2}$ est paire : l'intégrande est impaire et l'intégrale vaut 0. $\square$

<u>Complément 3 : cas I borné.</u> Dans ce cas le résultat est facile (et l'hypothèse équivaut à ρ intégrable). L'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{C}^0(\bar{I})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ par le th de Weierstrass. C'est encore vrai pour $\|\cdot\|_{L^2(I,\rho)}$ puisque $\|\cdot\|_{L^2(I,\rho)} \leq \sqrt{\|\rho\|_1} \cdot \|\cdot\|_\infty$. Or $\mathcal{C}_c^0(I)$, donc a fortiori $\mathcal{C}^0(\bar{I})$, est dense dans $L^2(I,\rho)$. Cela montre le résultat, par "transitivité". $\square$

Réf : Beck, Objectif agrégation : exo 3.7, p 140 (th, cpl 2).

↳ Définir : une fonction de poids sur un intervalle I est $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I x^n \rho(x)\,dx < \infty$; $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx$, $\|f\|_\rho = \sqrt{\langle f, f\rangle_\rho}$; $L^2(I, \rho)$ l'ens des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ mesurables tq $\|f\|_\rho < \infty$. L'espace $(L^2(I,\rho), \langle \cdot,\cdot\rangle_\rho)$ est alors de Hilbert.

↳ Ajouter dans le plan que pour ρ une fonction de poids, il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale pour $\langle \cdot,\cdot\rangle_\rho$ avec P_n unitaire de degré n pour $n \in \mathbb{N}$ (application de Gram-Schmidt (existence et unicité) à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$). On l'appelle famille de polynômes orthogonaux associé à ρ.

↳ Le complément le plus important est le second (répond à la question de la pertinence de l'hypothèse). L'inclure dans le dvt : il y a le temps ! En plus ça aide pour le recasage dans 236.

↳ Le premier complément est l'application du th avec polynômes de Hermite. Ceux-ci sont très utilisés notamment en probabilités et en physique.

↳ Le troisième complément montre que ce th n'est en fait utile que pour I non borné. Cela revient aux deux cas $I = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+$.

↳ Lorsque $I = \mathbb{R}$ l'hypothèse est optimale au sens où si $0 < \nu < 1$, on peut trouver un poids ρ tq $\exists \alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha |x|^\nu} \rho(x)\,dx < \infty$ mais l'espace des polynômes soit d'orthogonal non nul dans $L^2(\mathbb{R}, \rho)$. En effet on peut mq $\rho : x \mapsto |x|\, e^{-|x|^\mu}$ avec $\nu < \mu < 1$ convient (avec n'importe quel $\alpha > 0$).

↳ Lorsque $I = \mathbb{R}_+$ on peut mq la condition peut être affaiblie en $\exists \alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha\sqrt{x}} \rho(x)\,dx < \infty$. De plus cette nouvelle hypothèse est optimale au même sens que précédemment : si $0 < \nu < 1/2$, on peut trouver un poids ρ tq $\exists \alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x^\nu} \rho(x)\,dx < \infty$ mais l'espace des polynôme soit d'orthogonal non nul dans $L^2(\mathbb{R}_+, \rho)$. En effet on peut mq $\rho : x \mapsto e^{-|x|^\mu}$ avec $\nu < \mu < 1/2$ convient (avec n'importe quel $\alpha > 0$).