Th de Stone – Weierstrass

Leçons : 201, 203, 209.

Énoncés : On prend $X \neq \emptyset$ un espace métrique compact ; $H \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ est dite réticulée qd elle est stable par max et min ; $H \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ est dite séparante qd $\forall x \neq y \in X$, $\exists f \in H$, $f(x) \neq f(y)$.

• Lemme : on suppose que X possède au moins deux éléments. Si $H \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ est réticulée et vérifie $\forall x \neq y \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists f \in H$, $\begin{cases} f(x)=\alpha \\ f(y)=\beta \end{cases}$, alors H est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.

• Th 1 : si H est un sev de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.

• Th 2 (Stone – Weierstrass réel) : si H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.

• Th 3 (Stone – Weierstrass complexe) : si H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ séparante, contenant les fonctions constantes et stable par conjugaison, alors H est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$.

⊛ Lemme.

Soient $f \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On cherche $h \in H$ tq $\|f - h\| \leq \varepsilon$.

Fixons $x \in X$. Pour $y \in X \setminus \{x\}$, on applique la seconde hypothèse à $x \neq y$ et $f(x), f(y)$: soit $g_y \in H$ tq $\begin{cases} g_y(x) = f(x) \\ g_y(y) = f(y) \end{cases}$.

On note $U_y = \{ z \in X \mid g_y(z) > f(z) - \varepsilon \}$: c'est un ouvert tq $\{x,y\} \subset U_y$. Alors $X = \bigcup_{y \neq x} U_y$: par Borel – Lebesgue soient $y_1, \dots, y_n \in X \setminus \{x\}$ tq $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j}$. On pose $h_x = \max_{1 \leq j \leq n} (g_{y_j})$: $h_x \in H$ puisque H est réticulée. Par construction, $h_x(x) = f(x)$, et $h_x > f - \varepsilon$.

Nous allons à présent faire varier x. On pose $V_x = \{ z \in X \mid h_x(z) < f(z) + \varepsilon \}$: c'est un ouvert tq $x \in V_x$. Alors $X = \bigcup_{x \in X} V_x$: par Borel – Lebesgue soient $x_1, \dots, x_s \in X$ tq $X = \bigcup_{j=1}^{s} V_{x_j}$. On pose $h = \min_{1 \leq j \leq s} (h_{x_j})$: $h \in H$ puisque H est réticulée. Par construction, $f - \varepsilon < h < h + \varepsilon$: $\|f - h\| \leq \varepsilon$. □

⊛ Th 1.

Si $|X| = 1$ c'est clair ; on suppose le contraire. Soient $x \neq y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: d'après le lemme il suffit de vérifier qu'il existe $g \in H$ tq $\begin{cases} g(x) = \alpha \\ g(y) = \beta \end{cases}$. Comme H est séparant soit $f \in H$ tq $f(x) \neq f(y)$. Le système d'équations $\begin{cases} \lambda f(x) + \mu = \alpha \\ \lambda f(y) + \mu = \beta \end{cases}$ est de Cramer donc admet une unique solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$: $g = \lambda f + \mu$ convient alors, et est bien dans H puisque c'est un sev de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ possédant f et les fonctions constantes. □

⊛ Th 2.

• $\bar{H}$ est encore une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes. On va mq $\bar{H}$ est réticulée, et alors le th précédent conclura. On se contente de mq $\bar{H}$ est stable par $|\cdot|$, ce qui suffit puisque si $f, g \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$, $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ (et $\bar{H}$ est un sev).

- On commence par mq il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1;1]$. On pose $P_0 = 0$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X^2 - P_n^2)$. Montrons par réc sur $n\in\mathbb{N}$ que $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ pour tout $x\in[-1;1]$. Initialisation à $n=0$: $0\le 0 \le \frac{x^2}{2} \le |x|$ est clair.
Hérédité : sq $0\le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ où $n\in\mathbb{N}$ est fixé. D'abord $0 \le P_{n+1}(x)$. Ensuite $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}(x)^2)$ et $P_{n+1}(x)^2 \le x^2$ donc $P_{n+1}(x) \le P_{n+2}(x)$. Enfin $|x| - P_{n+2}(x) = |x| - P_{n+1}(x) - \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}(x)^2) = (|x| - P_{n+1}(x))(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x)))$ or $P_{n+1}(x) \le |x|$ et $1 = \frac{1}{2}(1+1) \ge \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))$, donc $|x| - P_{n+2}(x) \ge 0$ et $P_{n+2}(x) \le |x|$.
$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et bornée, et elle CVS vers une fonction f sur $[-1;1]$. On a $0 \le f(x) \le |x|$ pour tout $x\in[-1;1]$. Or par passage à la limite, $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f(x)^2)$ cad $f(x)^2 = x^2$: on en déduit $f = |\cdot|$.
Puisque $|\cdot|$ est $\mathcal{C}^0$ et que la CV est $\nearrow$ on peut appliquer le lemme de Dini : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers $|\cdot|$ sur $[-1;1]$.

- Soit $f\in\overline{H}$: mq $|f|\in\overline{H}$. On peut sq $f\neq 0$. Grâce à ce qui précède : $\left(P_n\circ \frac{f}{\|f\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers $\frac{|f|}{\|f\|}$, et $\left(\|f\|\cdot P_n \circ \frac{f}{\|f\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers $|f|$. Mais $\overline{H}$ étant une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$, $\|f\|\cdot P_n\circ\frac{f}{\|f\|} \in \overline{H}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On obtient $|f|\in\overline{H}$.

□

Th 3.

On pose $H_{\mathbb{R}} = \{f\in H \mid f(X)\subset\mathbb{R}\}$: c'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ contenant les fonctions constantes (réelles).
De plus si $f\in H$, $\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f+\overline{f}) \in H_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in H_{\mathbb{R}}$ donc $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in H_{\mathbb{R}}$. Soient $x\neq y\in X$: il existe $f\in H$ tq $f(x)\neq f(y)$; alors avec $g = \mathrm{Re} f$ ou $g = \mathrm{Im} f$, $g\in H_{\mathbb{R}}$ est tq $g(x)\neq g(y)$. Donc $H_{\mathbb{R}}$ est séparante.
Le th réel s'applique : $H_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$. Alors $H_{\mathbb{R}} + iH_{\mathbb{R}} \subset H$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}) + i\,\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$.

□

Complément 1 : Lemme de Dini.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\nearrow$ de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ convergeant simplement vers f. Si f est $\mathcal{C}^0$ alors la CV est uniforme.

Preuve. Soit $\varepsilon>0$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $U_n = \{x\in X \mid f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$: c'est un ouvert de X. Par CV simple, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Par Borel-Lebesgue on extrait un recouvrement fini ; or $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc cela signifie qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tq $X = U_N$. Alors pour $n\ge N$, $f - \varepsilon < f_N \le f_n \le f$: $\|f - f_n\| \le \varepsilon$. □

Complément 2 : $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.
Preuve. On applique le th 1. En effet $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ est réticulé car stable par $|\cdot|$, et séparant car si $x\neq y\in X$, $z\mapsto d(x,z)$ est 1-lip et vérifie $d(x,x) = 0 \neq d(x,y)$.
□
On pourrait aussi appliquer le th de S-W (on vérifie facilement que c'est une sous-algèbre).

Complément 3 : Th de Weierstrass (généralisé) : si $X\subset\mathbb{R}^d$ est compact, $\mathbb{R}[Y_1,\dots,Y_d]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.
Preuve. On applique le th de S-W. $\mathbb{R}[Y_1,\dots,Y_d]$ est évidemment une sous-algèbre contenant les fonctions constantes. Si $x\neq y\in X$, il existe $1\le i\le d$ tq $x_i\neq y_i$, et alors $Y_i(x) = x_i \neq y_i = Y_i(y)$. Elle est donc séparante. □

<u>Complément 4 :</u> L'algèbre des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions 2π-périodiques de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Preuve. D'abord on considère $H = \{ z \mapsto P(z,\bar{z}) \ ; \ P \in \mathbb{C}[Y_1, Y_2] \}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$.
$\mathbb{U}$ est compact et H vérifie les hypothèses de S-W complexe, donc est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$. Or l'application $f \mapsto (\theta \mapsto f(e^{i\theta}))$ est une isométrie bijective de $\mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$ dans l'espace des fonctions 2π-périodiques de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et l'image de H par cette application est $\{ \theta \mapsto P(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \ ; \ P \in \mathbb{C}[Y_1,Y_2] \}$, cad l'ensemble des polynômes trigonométriques. On a donc la densité voulue. □

<u>Complément 5 :</u> Exemple où le th de S-W complexe ne s'applique pas car H n'est pas stable par conjugaison.
On prend $X = \mathbb{U}$ et $H = \mathbb{C}[Y]$ (vu comme sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$). La seule hypothèse non vérifiée est la stabilité par conjugaison. Mq H non dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$.
Si $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$, donc $\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$ pour tout $P \in \mathbb{C}[Y]$. Par CVU on a encore, pour tout $f \in \overline{H}$, $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0$. Mais $\bar{\cdot} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$ est tq $\int_0^{2\pi} \overline{e^{i\theta}} e^{i\theta} d\theta = 2\pi \neq 0$: $\overline{H} \not\supseteq \mathcal{C}^0(\mathbb{U},\mathbb{C})$. □

<u>Réf :</u> Hirsch, Lacombe – Éléments d'analyse fonctionnelle : p 27.

↳ Tout est dans la réf ! Le lemme, les trois th, les cinq compléments, et plus.

↳ Si trop long : ne pas faire le cas complexe (th 3).

↳ Mettre dans le plan : le lemme de Dini, les trois th (pas le lemme), une ou deux applis (dont Weierstrass).

↳ Le complément 4 est aussi conséquence d'un th de théorie des séries de Fourier : le th de Fejér. Il dit que si f est $\mathcal{C}^0$ alors $\sigma_N(f) \xrightarrow[N\to\infty]{CVU} f$, avec $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.