Leçons : 162, 171, 181.

Conique passant par cinq points

Énoncés : • Prop : On se donne trois points non alignés A, B, C dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

↳ Les coniques sont les ensembles de points de coordonnées barycentriques (x, y, z) tq $P(x,y,z)=0$, avec $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ homogène de degré 2 non multiple de $X+Y+Z$ fixé.

↳ Si A, B, C appartiennent à la conique l'éq barycentrique se simplifie en $pYZ + qZX + rXY$ avec $p, q, r \in \mathbb{R}$ tq $(p,q,r) \neq (0,0,0)$.

↳ Dans ce dernier cas, la conique est propre ssi $pqr \neq 0$.

• Th : Si on considère cinq points distincts du plan affine, il existe une conique passant par ces cinq points. De plus :

↳ il y a unicité ssi les points sont 4 à 4 non alignés ;

↳ la conique est propre ssi les points sont 3 à 3 non alignés.

⊗ Prop :

• On rappelle qu'une conique est définie comme l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes (u, v) tq $P(u,v)$ où $P \in \mathbb{R}[U,V]$ est un polynôme de degré 2. On mq le chgmt de coordonnées fait correspondre les polynômes de $\mathbb{R}[U,V]$ de degré ≤ 2 avec les polynômes homogènes de degré 2 (ou nuls) de $\mathbb{R}[X,Y,Z]$, puis qu'en particulier ceux de degré exactement 2 correspondent aux non multiples de $X+Y+Z$.

Prenons $P = \alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma$: le chgmt de coordonnées cartésiennes vers barycentriques se fait par $U = \frac{Y}{X+Y+Z}$, $V = \frac{Z}{X+Y+Z}$. Après multiplication par $(X+Y+Z)^2$ on obtient $\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X+Y+Z) + \gamma(X+Y+Z)^2$, qui est bien homogène de degré 2 (ou nul).

Si réciproquement on prend un polynôme homogène de degré 2 de $\mathbb{R}[X,Y,Z]$ et qu'on effectue le chgmt de coordonnées $X = (1-U-V)$, $Y = U$, $Z = V$, on obtient bien un polynôme de $\mathbb{R}[U,V]$ de degré ≤ 2.

Si on prend le premier calcul fait, on voit que l'éq barycentrique est multiple de $X+Y+Z$ ssi $\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2$ l'est, ssi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ssi $\deg P < 2$.

• Dire que A est sur la conique revient à dire que le polynôme homogène annule $(1,0,0)$. Injecter ceci dans son expression mq le coef devant X^2 est nul. De même pour B, Y^2 ; C, Z^2.

Il ne reste donc que les termes croisés.

- L'équation cartésienne de $pYZ + qZX + rXY$ est $pUV + qV(1-U-V) + r(1-U-V)U$ $= -rU^2 + (p-q-r)UV - qV^2 + rU + qV$. La conique est propre ssi le déterminant

$$\begin{vmatrix} -r & (p-q-r)/2 & r/2 \\ (p-q-r)/2 & -q & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$$ est non nul. Or en faisant $\begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{cases}$ on obtient $\begin{vmatrix} -r/2 & (p-q)/2 & r/2 \\ (p-r)/2 & -q/2 & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$,

puis en faisant $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$ on arrive à $\begin{vmatrix} 0 & p/2 & r/2 \\ p/2 & 0 & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$. Par Sarrus le déterminant

est $\frac{pqr}{8} + \frac{pqr}{8} = \frac{pqr}{4}$. Ainsi la conique est propre ssi $pqr \neq 0$. $\square$

⊗ <u>Th.</u>

- Si quatre des cinq points sont alignés, la réunion de leur droite et d'une droite passant par le 5° point est une conique qui convient. Il n'y a pas unicité.
- On sq les points sont 4 à 4 non alignés. Il en existe trois parmi les cinq qui soient non alignés : on les note A, B, C (les deux autres étant D, E) et on se place dans le repère barycentrique qu'ils forment. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques de D et E. Les coniques passant par A, B, C, D, E sont celles d'équation $pYZ + qZX + rXY$ où $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est solution du système linéaire $\begin{cases} p\, y_1 z_1 + q\, z_1 x_1 + r\, x_1 y_1 = 0 \\ p\, y_2 z_2 + q\, z_2 x_2 + r\, x_2 y_2 = 0 \end{cases}$.

Le système est de rang ≤ 2. Par l'absurde sq il soit de rang ≤ 1. Les trois mineurs de taille 2 sont nuls : $d_1 = x_1 x_2 \begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, $d_2 = y_1 y_2 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$, $d_3 = z_1 z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$. Si $\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ ce qui signifie que A, D, E sont alignés. Par hypothèse B ne peut être aligné avec eux, donc $D, E \notin (AB)$, cad $z_1, z_2 \neq 0$. Vu que $d_3 = 0$ on a $\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$; là encore on réécrit $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ cad C, D, E alignés. A, C, D, E sont alignés : c'est absurde. Donc

$\begin{vmatrix} z_1 & y_2 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ et $x_1 x_2 = 0$. Si $x_1 = 0$ (cad $D \in (BC)$), on peut réécrire $d_2 = y_1 y_2 z_1 x_2 = 0$ et $d_3 = z_1 z_2 y_1 x_2 = 0$. B, C, D, E sont non alignés donc $x_2 \neq 0$; D est distinct de B et C donc $y_1, z_1 \neq 0$. On en déduit $y_2 = 0$ et $z_2 = 0$: $E = A$, absurde. De même on trouve une contradiction si $x_2 = 0$. Toutes les possibilités sont donc absurdes !

Finalement le rang du système est 2. Puisque la dimension est 3, l'ensemble des solutions forme une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Puisque multiplier une équation par un réel non nul ne modifie pas la conique, il y a bien une unique conique passant par A, B, C, D, E.

- Si trois des cinq points sont alignés, on les note A, B, D : D a pour coordonnées barycentriques $(x, y, 0)$ avec $x, y \neq 0$. La conique d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY$ le contient cad $rxy = 0$ et $r = 0$. Ainsi $pqr = 0$ et la conique est dégénérée.
Réciproquement si la conique est dégénérée, $pqr = 0$; on peut sq $p = 0$. L'équation est alors $X(qZ + rY)$: un produit de deux équations de droites, et la conique est réunion de deux droites. Par principe des tiroirs au moins trois des cinq points sont alignés. $\square$

Complément : lien entre coordonnées cartésiennes et barycentriques.

Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de l'espace affine de dimension n, soit M un point de cet espace. Ses coordonnées cartésiennes sont $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_0A_i}$; ses coordonnées barycentriques sont $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$, et $\sum x_i \neq 0$ (définies à multiplication par un réel non nul près).

Si $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_0A_i}$, $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i (\overrightarrow{A_0M} - \overrightarrow{A_iM})$ et $\left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i\right) \overrightarrow{A_0M} + \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$:

on a donc $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i$ et $x_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Si $\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$ avec $s = \sum_{i=0}^{n+1} x_i \neq 0$, $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i (-\overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_0M}) = -\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_0A_i} + s\overrightarrow{A_0M}$

donc $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s} \overrightarrow{A_0A_i}$: $u_i = \frac{x_i}{s}$ pour $1 \leq i \leq n$. $\square$

Réf :
- Eiden – Géométrie analytique classique : p 52.
- Audin – Géométrie : p 222 (rappels coniques).

↳ Trop long de tout faire. Admettre (ou dire un mot rapide) les points 1 et 3 de la prop.

↳ La déf de conique (celle que l'on choisit du moins) est rappelée au début de la preuve de la prop. Une conique d'équation $\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma$ est dite propre lorsque sa forme quadratique homogénéisée associée, $(\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2) + (\beta_1 U + \beta_2 V) W + \gamma W^2$ est non dégénérée ; cad lorsque le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2/2 & \beta_1/2 \\ \alpha_2/2 & \alpha_3 & \beta_2/2 \\ \beta_1/2 & \beta_2/2 & \gamma \end{vmatrix}$ est non nul.

↳ On rappelle la classification affine des coniques non vides (voir Audin) (rangées par la signature de $\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2$) : ellipse, point ; parabole, droite, droites parallèles ; hyperbole, droites sécantes. Celles qui sont propres sont les ellipses, paraboles, hyperboles.

↳ On peut déterminer effectivement les p, q, r qui conviennent par pivot de Gauss.

↳ Dans la preuve du 3^e point de la prop, on peut aussi directement appliquer Sarrus au déterminant obtenu (sans faire les transvections) puis simplifier. Pas de réf pour ce point.

↳ Dans la preuve du 3^e point du th, si on suppose (dans le sens direct) les points 4 à 4 non alignés, on peut dire qu'une certaine réunion de deux droites convient et que par unicité c'est notre conique, qui est donc dégénérée. Ici on ne suppose pas cela par souci de généralité, ce qui montre que dans le cas sans unicité les coniques ne sont pas propres.

↳ Corollaire du th : deux coniques distinctes sans droite commune s'intersectent en au plus quatre points. La preuve est faite par Eiden (avec cinq points dans l'intersection : si trois sont alignés, leur droite est commune ; sinon l'unicité du th s'applique et les coniques sont égales). Rq : il s'agit d'un cas particulier de la version faible du th de Bézout.