Leçons : 159.

Dualité sur $M_n(k)$

Énoncés :

- Prop 1 : soit $\ell \in M_n(k)^*$ tq $\forall X,Y \in M_n(k)$, $\ell(XY) = \ell(YX)$: on a $\ell \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Tr})$.
- Prop 2 : si $A \in M_n(k)$ on note $\ell_A : \begin{cases} M_n(k) \to k \\ X \mapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{cases}$. Alors $f : \begin{cases} M_n(k) \to M_n(k)^* \\ A \mapsto \ell_A \end{cases}$ est un isomorphisme.
- Appli 1 : $n \geq 2$ tout hyperplan de $M_n(k)$ coupe $GL_n(k)$.
- Appli 2 : $A, B \in M_n(k)$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes :
  (i) $\exists X \in M_n(k)$, $B = AX + XA$;
  (ii) $\forall C \in M_n(k)$, $(AC + CA = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(BC) = 0)$.

⊛ Prop 1.

On note, pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,j} = [\delta_{k,i}\delta_{\ell,j}]_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq \ell\leq n}}$ (ces matrices forment la base can de $M_n(k)$).

Si $i \neq j$, $\ell(E_{i,j}) = \ell(E_{i,i}E_{i,j}) = \ell(E_{i,j}E_{i,i}) = \ell(0) = 0$. On a aussi $\ell(E_{i,i}) = \ell(E_{i,j}E_{j,i}) = \ell(E_{j,i}E_{i,j}) = \ell(E_{j,j})$. Si on note $\lambda \in K$ la valeur commune des $\ell(E_{i,i})$, ℓ coïncide avec $\lambda \mathrm{Tr}$ sur la base can : $\ell = \lambda \mathrm{Tr}$. □

⊛ Prop 2.

Il est clair que f est bien déf et linéaire. Par égalité de dimensions il suffit de vérifier l'injectivité.

Soit $A \in M_n(k)$ tq $\ell_A = 0$. Pour i,j : $AE_{ij} = \sum_{k,\ell} A_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} E_{k,j}$ (si $\ell \neq i$ le terme est nul ; et $E_{k,i}E_{i,j} = E_{k,j}$). On passe à la trace : $0 = \ell_A(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \mathrm{Tr}(E_{k,j}) = A_{j,i}$ (si $k \neq j$ le terme est nul). Donc $A = 0$. □

⊛ Appli 1.

Soit H un hyperplan de $M_n(k)$: c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle ; d'après ce qui précède on peut l'écrire $H = \ker \ell_A$ pour une $A \in M_n(k) \setminus \{0\}$. On cherche alors $X \in GL_n(k)$ tq $\mathrm{Tr}(AX) = 0$.

Soit $r = \mathrm{rg} A \geq 1$: $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(k)$ et $P, Q \in GL_n(k)$. Alors si $X \in GL_n(k)$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(J_r(QXP))$: on cherche $Y \in GL_n(k)$ tq $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$, et alors $X = Q^{-1}YP^{-1}$ conviendra.

On prend pour Y une matrice de permutation cyclique : $Y = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$. En effet alors

$$J_rY = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & \end{bmatrix}$$

a une trace nulle.

□

Appli 2.

Pour (i) ⇒ (ii) un simple calcul suffit : $\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(AXC) + \mathrm{Tr}(XAC) = \mathrm{Tr}(CAX) + \mathrm{Tr}(ACX)$
$= \mathrm{Tr}((CA+AC)X) = \mathrm{Tr}(0) = 0$.

Ensuite on pose $g : X \mapsto AX + XA$ un endomorphisme de $M_n(K)$. (i) se reformule en $B \in \mathrm{Im}\, g$.
Si on reprend les notations de la prop 2, (ii) équivaut à $\forall C \in \mathrm{Ker}\, g,\ \beta_C(B) = 0$, cad à
$B \in \beta(\mathrm{Ker}\, g)^\circ$ (c'est l'orthogonal de $\beta(\mathrm{Ker}\, g)$ au sens de la dualité). On vient de mq $\mathrm{Im}\, g \subset \beta(\mathrm{Ker}\, g)^\circ$.
Pour voir l'inclusion réciproque (cad (ii) ⇒ (i)) il suffit de mq les dimension sont égales.
Or $\dim(\beta(\mathrm{Ker}\, g)^\circ) = n^2 - \dim \beta(\mathrm{Ker}\, g) = n^2 - \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathrm{Im}\, g$ (successivement par dualité, car β est un isomorphisme, et par le th du rang) : c'est bon. $\square$

Réf : FGN - Algèbre 1 : p 305 (prop 1, prop 2, appli 1), p 311 (appli 2).

↳ Il s'agit d'une suite de petites propriétés en lien avec la dualité sur $M_n(K)$.

↳ On utilise qq fois que $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$. En effet multiplier à gauche par E_{ij} ne garde que la j^e ligne en position i. Si $j \neq k$ le produit est nul ; si $j = k$ cela donne E_{il}.

↳ On peut aussi déduire la prop 1 de la prop 2 : c'est à peine moins direct. Les deux preuves sont faites dans la réf.

↳ Cas $K = \mathbb{R}$: $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un ps sur $M_n(K)$, qui donne l'isomorphisme de dualité $A \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA\,\cdot)$.
À transposition près on retrouve celui exhibé ici.