Homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

et décomposition polaire

Leçons : 155, 156, 158, 160, 203.

Énoncés :

- Th 1 : exp induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- corollaire : $\begin{cases} \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \\ S \mapsto S^{1/2} \end{cases}$ induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur lui-même.
- th 2 : décomposition polaire. $\begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (P,S) \mapsto PS \end{cases}$ est un homéomorphisme.

⊛ Th 1.

- Bien déf. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: $S = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, P$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \mathrm{Sp}\, S$. Alors $\exp(S) = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})\, P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Inj. Sq $\exp S = \exp S'$ avec $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Comme ci-dessus $S' = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)\, P$ et $\exp S' = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(e^{\mu_1}, \cdots, e^{\mu_n})\, P$. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq pour $1 \leq i \leq n$, $Q(e^{\mu_i}) = \mu_i$ (par interpolation de Lagrange sur les μ_i distincts), et $S' = Q(\exp S')$. Or $\exp S' = \exp S \in \mathbb{R}[S]$ donc $S' \in \mathbb{R}[S]$; finalement S et S' commutent.
  Elles sont diagonalisables par le th spectral, donc par codiagonalisation il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, P$ et $S' = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)\, P$. Passer à l'exponentielle donne $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, or $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est injective : $\lambda_i = \mu_i$. Ainsi $S = S'$.

- Surj. Soit $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $T = P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, P$ avec $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \mathrm{Sp}\, T \subset \mathbb{R}_+^*$. Il vient $T = \exp(P^{-1}\, \mathrm{Diag}(\ln \lambda_1, \cdots, \ln \lambda_n)\, P) \in \exp(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

- exp $\mathcal{C}^0$. Connu.

- $\exp^{-1}$ $\mathcal{C}^0$. Soient $T_n, T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $T_n \xrightarrow[n \to \infty]{} T$, on note $S_n = \exp^{-1}(T_n)$ et $S = \exp^{-1}(T)$: mq $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (pour l'extraction φ), $\exp S' = \lim\limits_{n \to \infty} \exp S_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} T_{\varphi(n)} = T$: par injectivité $S' = S$.
  On va mq la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans un compact.
  On rappelle que pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ de A est $\|A\|_2 = \rho(A)$.
  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée, et en particulier $(\rho(T_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : il existe $\beta > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sp}\, T_n \subset]0 ; \beta]$. De même $(T_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers T^{-1}) donc $(\rho(T_n^{-1}))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Or $\rho(T_n^{-1}) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, T_n} |\lambda|^{-1} = \left(\min\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, T_n} |\lambda|\right)^{-1}$: il existe $\alpha > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sp}\, T_n \subset [\alpha ; \infty[$.
  Finalement pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sp}\, T_n \subset [\alpha ; \beta]$ donc $\mathrm{Sp}\, S_n \subset \ln([\alpha ; \beta]) = [\ln \alpha ; \ln \beta]$ et $\|S_n\|_2 = \rho(S_n) \leq \max(-\ln \alpha, \ln \beta)$. Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, cad qu'elle est dans un compact. Comme elle a au plus une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci. □

⊛ Corollaire.

Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}\mathbb{R}$: $(S^{1/2})^2 = S$

$$\exp^{-1}((S^{1/2})^2) = \exp^{-1}(S)$$

$$S^{1/2} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\exp^{-1}(S)\right).$$

Or par composition, $\begin{cases} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ S \mapsto \exp\left(\tfrac{1}{2}\exp^{-1}(S)\right) \end{cases}$ est un homéomorphisme.

□

⊛ Th 2.

On pose $\varphi : \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ (P,S) \mapsto PS \end{cases}$ et $\psi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto (M({}^tMM)^{-1/2}, ({}^tMM)^{1/2}) \end{cases}$.

φ est bien déf et $\mathcal{C}^0$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $({}^tMM)^{1/2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'une part ; d'autre part $M({}^tMM)^{-1/2} \cdot {}^t(M({}^tMM)^{-1/2}) = M({}^tMM)^{-1/2}({}^tMM)^{-1/2}\,{}^tM = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM = MM^{-1}\,{}^tM^{-1}\,{}^tM = I_n$ donc $M({}^tMM)^{-1/2} \in O_n(\mathbb{R})$. Donc ψ est bien déf ; de plus d'après le corollaire elle est $\mathcal{C}^0$.

On vérifie que $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ valent l'identité, ce qui prouvera que ce sont des homéomorphismes. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, $\varphi \circ \psi(M) = M({}^tMM)^{-1/2} \cdot ({}^tMM)^{1/2} = M$. Si $(P,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $({}^t(PS)PS)^{1/2} = (S\,{}^tPPS)^{1/2} = (S^2)^{1/2} = S$: on en déduit que $\psi \circ \varphi(P,S) = (P,S)$.

□

Complément : lemme : si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \rho(A)$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$.

Preuve. Par le th spectral soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de de vecteurs propres pour les vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A. Alors pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\|_2 = 1$: $\|Ax\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i A e_i\|_2^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i\|^2$ $= \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i^2$ par Pythagore. Or $\sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \rho(A)^2 \cdot \|x\|_2^2 = \rho(A)^2$. Donc $\|A\|_2 \leq \rho(A)$. De plus si $1 \leq i \leq n$ est tq $\rho(A) = |\lambda_i|$, $\|Ae_i\|_2^2 = \lambda_i^2 = \rho(A)^2$ donc $\|A\|_2 \geq \rho(A)$.

□

Réf : HHG61 : p 208 (th 1).

↳ Ce dév n'est souvent pas fait exactement comme ça : il ne contient que le th 1 et le lemme (qui est ici en complément). Assez long : il faut aller vite sur certains points (par ex $S_p T_n \subset [\alpha ; \infty[$ avec $\alpha > 0$ ds th 1, et les vérifications ds th 2).

↳ En fait dans le corollaire, on peut déf $S \mapsto S^{1/2}$ de cette manière. Cependant cela ne le déf pas sur tout $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

↳ Dans les trois énoncés, les homéomorphismes sont en fait même des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes (pour le th 1 et le corollaire, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des ouverts du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; pour le th 2 il faut munir $O_n(\mathbb{R})$ d'une structure de sous-variété différentielle de l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$). Le changement dans la preuve du th 1 est que l'on remplace la preuve de la continuité de $\exp^{-1}$ par la preuve qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$, en appliquant le th d'inversion locale. Les preuves du corollaire et du th 2 ne changent pas.

↳ La continuité de exp découle de la convergence normale de la série $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.