# Décomposition de Dunford

Leçons : 153, 157.

**Énoncés :**

- Lemme : $E$ un $K$-ev, $u \in L(E)$, $P \in K[X]$ annulant $u$. On écrit $P = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$ une DFI de $P$ dans $K[X]$ et on pose $N_i = \mathrm{Ker}\left(P_i^{\alpha_i}(u)\right)$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ et pour $1 \leq i \leq n$, le projecteur sur $N_i$ // à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en $u$.

- Th : Soit $u \in L(E)$ trigonalisable. Il existe d'uniques $\delta \in L(E)$ diagonalisable et $\nu \in L(E)$ nilpotent qui commutent tq $u = \delta + \nu$. On a alors $\delta, \nu \in K[u]$.

---

## ⊛ Lemme.

- Par le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$. On sq $n \geq 2$ (le cas $n=1$ est trivial).
On pose, pour $1 \leq i \leq n$, $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$. Ils sont premiers entre eux dans leur ensemble : il existe $U_1, \dots, U_n \in K[X]$ tq $\sum_{i=1}^{n} U_i Q_i = 1$. On pose $p_i = U_i Q_i(u)$ pour $1 \leq i \leq n$ : mq c'est le projecteur attendu.

- D'abord l'égalité ci-dessus donne $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Si $i \neq j$, $P | Q_i Q_j$ donc $p_i p_j = U_i U_j(u) \cdot Q_i Q_j(u) = 0$. En composant par $p_i$ notre somme on a donc $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_i p_j = p_i^2$ : c'est un projecteur.

- Mq $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$. Si $x \in E$ : $P_i^{\alpha_i}(u)(p_i(x)) = P_i^{\alpha_i} U_i Q_i(u)(x) = U_i P(u)(x) = 0$ donc $\mathrm{Im}\, p_i \subset N_i$. Réciproquement soit $x \in N_i$. Pour $j \neq i$, $P_i^{\alpha_i} | Q_j$ donc $p_j(x) = U_j Q_j(u)(x) = 0$. Ainsi $x = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$.

- Mq $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, p_i$, $x = \sum_{j=1}^{n} p_j(x) = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$. À l'inverse soient $j \neq i$ et $x \in N_j$ : $P_j^{\alpha_j} | Q_i$ donc $p_i(x) = U_i Q_i(u)(x) = 0$. Finalement $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

□

## ⊛ Th.

- Existence.
Par hypothèse $\pi_u$ est scindé : on écrit $\pi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp 2à2 $\neq$ de $u$.
On applique le lemme à $P = \pi_u$ : les $N_i$ sont les se caractéristiques de $u$. On pose $\delta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$ et $\nu = u - \delta$ : ils commutent et vérifient $u = \delta + \nu$.
Toute base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ diagonalise $\delta$, qui est donc diagonalisable.

Ensuite $\nu = u - \delta = \sum_{i=1}^{n} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) p_i$ car $u = \sum_{i=1}^{n} u p_i$. Si l'on élève cette égalité à une puissance, $p_i p_j = 0$ pour $i \neq j$ donc les produits croisés sont nuls. Ainsi $\nu^m = \sum_{i=1}^{n} (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^m p_i$ pour $m \in \mathbb{N}$. Mais si $m \geq \alpha_i$, $(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^m p_i = (X - \lambda_i)^m U_i Q_i(u) = 0$ car $\pi_u$ divise ce polynôme. Ainsi avec $m = \max(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ on trouve $\nu^m = 0$ : $\nu$ est nilpotent.

- Unicité.

Soit $(\delta', \nu')$ un autre couple qui convient (on ne le suppose pas polynomial en $u$) : mq $\delta' = \delta$, $\nu' = \nu$. $\delta'$ et $\nu'$ commutent avec $u = \delta' + \nu'$ donc avec les polynômes en $u$ $\delta$ et $\nu$. De plus $\delta' - \delta = \nu - \nu'$.

$\delta'$ et $\delta$ commutent et sont diagonalisables donc par codiagonalisation, $\delta' - \delta$ est diagonalisable.

On a aussi $\nu - \nu'$ nilpotent : en effet si $\nu^m = \nu'^{m'} = 0$, vu que $\nu$ et $\nu'$ commutent, $(\nu - \nu')^{m+m'-1} = \sum_{k=0}^{m+m'-1} \binom{m+m'-1}{k} (-1)^{m+m'-1-k} \nu^k \nu'^{m+m'-k-1}$. Si $k \geq m$, $\nu^k = 0$, sinon $-k \geq 1 - m$, $m + m' - 1 - k \geq m'$ et $\nu'^{m+m'-k-1} = 0$ : ainsi tous les termes sont nuls.

Finalement $\delta' - \delta = \nu - \nu'$ est un endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent : il est nul. Cela conclut. □

---

Réf : Gourdon - Algèbre : p 192.

↳ On peut faire une preuve plus directe du th (sans le lemme) mais on n'obtient pas que $\delta, \nu \in K[u]$. Cette version est aussi dans la réf.

↳ Attention aux notations : dans la réf, $P_i$ désigne autre chose.

↳ Avoir en tête la forme matricielle. De plus il est immédiat que $\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\, \delta$, et que si $\lambda$ est l'une de ces vp, $N_\lambda(u) = E_\lambda(\delta)$ (dans la preuve c'est, pour $\lambda_i$, $N_i$).

↳ On pourrait remplacer dans la preuve n'importe quel polynôme annulateur de $u$ dont les facteurs irréd sont les $X - \lambda$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\, u$ (autrement dit $c \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $c \in K^*$ et $\beta_i \geq \alpha_i$). En particulier $\chi_u$ convient.

↳ Les preuves faites ici sont constructives, modulo le calcul des $U_i$. Cela est possible en faisant la DES de $P^{-1} \in K(X)$ ; c'est fait dans la réf.

↳ Savoir montrer la codiagonalisation.