Leçons : 153, 156, 204, 214.

Surjectivité de $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$

Énoncé : Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[M]) = \mathbb{C}[M]^\times$. En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve.

- Mq $\mathbb{C}[M]^\times = \mathbb{C}[M] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

  L'inclusion $\subset$ est triviale. Soit réciproquement $A \in \mathbb{C}[M] \cap GL_n(\mathbb{C})$. On écrit $\pi_A = \alpha + XQ$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a alors $\alpha I_n + AQ(A) = 0$ et $\alpha A^{-1} + Q(A) = 0$. Si $\alpha = 0$, Q annule A ce qui est absurde ; alors $A^{-1} = -\alpha^{-1} Q(A) \in \mathbb{C}[A] \subset \mathbb{C}[M]$. On a bien $A \in \mathbb{C}[M]^\times$.

- Mq $\mathbb{C}[M]^\times$ est connexe par arcs.

  Soient $A, B \in \mathbb{C}[M]^\times$: pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1-z)A + zB \in \mathbb{C}[M]$. Le but est d'éviter les matrices non inversibles. La fonction $z \mapsto \det((1-z)A + zB)$ est polynomiale en z, et le polynôme associé est non nul car en 0 on a $\det A \neq 0$. L'ensemble R de ses racines est alors fini : on peut construire $z \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{C} \setminus R)$ tq $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$. Alors $t \mapsto (1-z(t))A + z(t)B$ envoie 0 sur A et 1 sur B : ce chemin convient.

- Mq $\exp : \mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[M]^\times$ est un morphisme de groupes.

  D'abord si $A \in \mathbb{C}[M]$, $\mathbb{C}[A]$ est un sev de $M_n(\mathbb{C})$ donc fermé (on est en dim finie) : $\exp A \in \mathbb{C}[A] \subset \mathbb{C}[M]$. De plus $\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A-A) = I_n$ donc $\exp A \in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\exp A \in \mathbb{C}[M]^\times$. Ensuite $\exp$ est un morphisme de $\mathbb{C}[M]$ dans $\mathbb{C}[M]^\times$ car les éléments de $\mathbb{C}[M]$ commutent deux à deux.

- Mq $G = \exp(\mathbb{C}[M])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[M]^\times$.

  Prise sur $M_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle a pour différentielle en 0 $D_0 \exp = \mathbb{1}_{M_n(\mathbb{C})}$, donc restreinte à $\mathbb{C}[M]$ on a $D_0 \exp = \mathbb{1}_{\mathbb{C}[M]}$. Cette application linéaire est inversible et le th d'inversion locale s'applique : il existe $U \ni 0$ et $V \ni I_n$ deux ouverts de $\mathbb{C}[M]$ (car $G \subset \mathbb{C}[M]$) tq $\exp|_U^V$ soit un difféomorphisme.
  Maintenant si $A \in G$, AV est un voisinage de A dans $A\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[M]$ puisque $B \mapsto A \cdot B$ est un homéomorphisme.
  On voit que $\exp : \mathbb{C}[M] \to \mathbb{C}[M]^\times$ est un morphisme de groupes, G est un sg de $\mathbb{C}[M]^\times$ et $AV \subset G$.
  Ainsi G contient un voisinage de A dans $\mathbb{C}[M]$. Ceci prouve que G est ouvert (dans $\mathbb{C}[M]$ donc dans $\mathbb{C}[M]^\times$).

- On conclut.

  Pour mq G est fermé dans $\mathbb{C}[M]^\times$ on utilise l'égalité $\mathbb{C}[M]^\times \setminus G = \bigcup_{A \in \mathbb{C}[M]^\times \setminus G} AG$, qui n'est qu'une reformulation de la partition en classes à gauche $\mathbb{C}[M]^\times = \bigsqcup_{\bar{A} \in \mathbb{C}[M]^\times / G} AG$. Puisque G et donc AG pour tout $A \in \mathbb{C}[M]^\times \setminus G$ est ouvert, par réunion $\mathbb{C}[M]^\times \setminus G$ l'est : G est fermé.
  G est donc un ouvert fermé du connexe (car connexe par arcs) $\mathbb{C}[M]^\times$: $G = \mathbb{C}[M]^\times$. Ceci montre la surjectivité de $\exp$; en effet si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $M \in \mathbb{C}[M]^\times \subset \exp(M_n(\mathbb{C}))$. $\square$

Complément 1 : corollaire : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2 ; M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Preuve. $\boxed{\subset}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$: $\exp A = (\exp(\frac{1}{2}A))^2$ est un carré dans $GL_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Par surjectivité dans le cas complexe, soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $M = \exp(P(M))$.

On a alors (car la conjugaison est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre continu et car M est réelle) :

$\exp(\overline{P}(M)) = \exp(\overline{P(M)}) = \overline{\exp(P(M))} = \overline{M} = M$. Finalement $M^2 = \exp(P(M))\exp(\overline{P}(M))$

$= \exp((P+\overline{P})(M))$ où $P+\overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ donc $(P+\overline{P})(M) \in \mathbb{R}[M] \subset M_n(\mathbb{R})$. $\square$

Complément 2 : pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, si $H \in M_n(\mathbb{C})$ commute avec M : $D_M \exp(H) = \exp M \cdot H = H \cdot \exp M$.

En particulier si $M = 0$, $D_0 \exp = \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{C})}$.

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $e_k : M \mapsto M^k$: si H commute avec M, $D_M e_k(H) = kM^{k-1}H$ pour $k \geq 1$ et $D_M e_0 = 0$. Ainsi pour $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre, en norme subordonnée : $\|D_M e_k\| \leq k\|M\|^{k-1}$ pour $k \geq 1$.

Alors sur tout compact de $M_n(\mathbb{C})$ il y a convergence normale de $\sum_k \frac{De_k}{k!}$ (appli de $M_n(\mathbb{C})$ ds $L(M_n(\mathbb{C}))$).

Par interversion différentielle-limite, $\exp$ est C^1 et si $M, H \in M_n(\mathbb{C})$ commutent on a

$D_M \exp(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D_M e_k(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} M^{k-1} H = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^{k-1}}{(k-1)!}\right) H = \exp M \cdot H$. $\square$

Réf : Zavidovique - Un max de maths : ch 9, p 49.

↳ Autre preuve de la surjectivité : par les matrices unipotentes et Dunford multiplicative. Plus explicite, longueur équivalente. Cependant celle choisie ici montre un résultat un peu plus précis.

↳ Si $n \geq 2$ exp n'est injective ni sur $\mathbb{C}$ ni sur $\mathbb{R}$! Pas injective non plus si $n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

Exemple pour $n \geq 2$: $\exp(0) = I_n = \exp\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 & \\ \hline & 0 & I_{n-2} \end{array}\right]$.

↳ On a montré que $\mathbb{C}[M]^\times$ était connexe par arcs. En l'occurrence ce n'est pas strictement plus fort que connexe, puisque c'est un ouvert d'un evn de dim finie.