Ellipsoïde de John - Loewner

Leçons : 152, 158, 170, 171, 219, 253.

Énoncés : • lemme : $\det : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ est strictement log-concave ; cad : si $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha+\beta = 1$ alors $\det(\alpha S + \beta S') \geq (\det S)^\alpha \cdot (\det S')^\beta$, et si de plus $S \neq S'$ et $\alpha, \beta > 0$ alors l'inégalité est stricte.

• prop : pour $q \in Q_+^*$ on note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$ l'ellipsoïde associé ; on a alors $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = \dfrac{\mathrm{Vol}(B)}{\sqrt{D(q)}}$ où B est la boule unité pour la norme euclidienne et $D(q) = \det(\underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\, q)$ avec B_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• Th : $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Il existe un ellipsoïde (centré en 0) contenant K et de volume minimal ; de plus il est unique.

⊛ Lemme.

D'abord on note que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien convexe, car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'est (c'est un sev de $M_n(\mathbb{R})$) et si ${}^tXSX > 0$ et ${}^tXS'X > 0$ pour $X \neq 0$, ${}^tX(S+S')X = {}^tXSX + {}^tXS'X > 0$.

Soient $S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \geq 0$ avec $\alpha + \beta = 1$. Par le th de réduction simultanée il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^tPDP$ et $S' = {}^tPD'P$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $D' = \mathrm{Diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. D'une part $\det(\alpha S + \beta S') = \det P^2 \cdot \det(\alpha D + \beta D') = \det P^2 \cdot \prod_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \beta\mu_i)$, d'autre part $(\det S)^\alpha (\det S')^\beta = \det P^{2(\alpha+\beta)} \cdot (\det D)^\alpha \cdot (\det D')^\beta = \det P^2 \cdot \prod_{i=1}^n (\lambda_i^\alpha \cdot \mu_i^\beta)$.

Or pour $1 \leq i \leq n$, $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i \geq \lambda_i^\alpha \mu_i^\beta$: c'est l'inégalité arithmético-géométrique (qui est conséquence de la concavité de ln). Cela montre le résultat.

Si $S \neq S'$ et $\alpha, \beta > 0$ il existe i tq $\lambda_i \neq \mu_i$, et alors l'inégalité pour ce i est stricte (car ln est strictement concave) ; donc la globale l'est encore. □

⊛ Prop.

On pose $S = \underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\, q \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $u \in GL(\mathbb{R}^n)$ tq $S^{1/2} = \underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\, u$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$: $q(x) = {}^tx S x = {}^t(S^{1/2}x) \cdot (S^{1/2}x) = \langle u(x), u(x) \rangle = \|u(x)\|^2$ avec $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et $\|\cdot\|_2$ euclidiens canoniques. Ainsi $q(x) \leq 1 \Leftrightarrow \|u(x)\| \leq 1 \Leftrightarrow u(x) \in B$, et $\mathcal{E}_q = u^{-1}(B)$. Alors $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = |\det(u^{-1})| \cdot \mathrm{Vol}(B)$, avec $\det(u^{-1}) = \det(S^{-1/2}) = \dfrac{1}{\sqrt{\det S}}$. □

⊛ Th.

- Existence.

Minimiser $Vol(\mathcal{E}_q)$ revient, par ce qui précède, à maximiser $D(q)$. On munit l'espace des formes quadratiques Q de la norme $N : q \mapsto \max_{x\in K} |q(x)|$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes ; pour la séparation, sq $N(q) = 0$. $q(x) = 0$ pour $x \in K$, et $K \subset C(q)$. Soit $x \in \mathring{K}$.
Si l'on prend $y \in \mathbb{R}^n$, pour $t > 0$ assez petit, $x + ty \in K \subset C(q)$ et $0 = q(x+ty) = q(x) + 2t\beta(x,y) + t^2 q(y)$ avec β la forme polaire de q. Ainsi le polynôme $q(y)T^2 + 2\beta(x,y)T + q(x) \in \mathbb{R}[T]$ est nul, et $q(y) = 0$.
Donc $C(q) = \mathbb{R}^n$ et $q = 0$.

On pose $A = \{q \in Q_+ \mid K \subset \mathcal{E}_q\} = \{q \in Q_+ \mid \forall x \in K,\ q(x) \leq 1\} = Q_+ \cap B'_N(0,1)$: il s'agit de maximiser D sur A. A est, comme intersection de convexes fermés, convexe fermé ; A est aussi évidemment borné. C'est donc un compact convexe.
Reste à vérifier que D est ~~est~~ continue. D'une part $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'est. D'autre part $\underset{B_0}{\mathrm{Mat}} : Q \to S_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme linéaire, il est donc aussi continu. Par composition D est continue.
Cela montre que D atteint son maximum sur A. Il existe $q \in A$ tq $D(q) > 0$ (par exemple $q = \frac{\|\cdot\|^2}{N(\|\cdot\|^2)}$ par déf de A), donc ce maximum est > 0. Le volume $Vol(\mathcal{E}_q) = \frac{Vol(B)}{\sqrt{D(q)}}$ est minimisé.

- Unicité.

Supposons que $\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{E}_{q'}$ conviennent. En particulier leurs volumes sont les mêmes, et $D(q) = D(q')$.
Soient $S = \underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\, q$ et $S' = \underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\, q'$. Par convexité, $\frac{1}{2}(q+q') \in A$, et $\underset{B_0}{\mathrm{Mat}}\left(\frac{1}{2}(q+q')\right) = \frac{1}{2}(S+S')$.
Si on suppose $q \neq q'$, $S \neq S'$ et d'après le lemme : $D\left(\frac{1}{2}(q+q')\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S+S')\right) > (\det S \cdot \det S')^{1/2}$
$= (D(q) \cdot D(q'))^{1/2} = D(q)$. C'est absurde ! D'où l'unicité. □

Complément : Pour tout sous-groupe compact G de $GL(\mathbb{R}^n)$ il existe $q \in Q_+^*$ tq $G \subset O(q)$.
Preuve. Soit $K = \bigcup_{g\in G} g(B) = \{g(x) ; (g,x) \in G \times B\}$, où B est toujours la boule unité euclidienne. G et B sont compacts et $(g,x) \mapsto g(x)$ est continue donc K est compact ; de plus $B \subset K$ donc $\mathring{K} \neq \emptyset$. Soit $q \in Q_+^*$ tq $\mathcal{E}_q \supset K$ soit de volume minimal. On montre que $G \subset O(q)$.

Soit $g \in G$: il s'agit de mq $q \circ g = q$; on note $q' = q \circ g \in Q_+^*$. Par l'unicité du th il suffit de mq $K \subset \mathcal{E}_{q'}$ et $D(q) = D(q')$.
Si $h \in G$ et $x \in B$, $q'(h(x)) = q(g \circ h(x)) \leq 1$ car $g \circ h(x) \in K$. Donc $h(x) \in \mathcal{E}_{q'}$ et $K \subset \mathcal{E}_{q'}$.
Enfin $D(q') = D(q \circ g) = D(q) \cdot (\det g)^2$. Or $\{g^k ; k \in \mathbb{Z}\} \subset G$ est compact et $\det$ est continue, donc $\{(\det g)^k ; k \in \mathbb{Z}\}$ est compact, ce qui impose $|\det g| = 1$. Comme $\det g \in \mathbb{R}$, $(\det g)^2 = 1$ et $D(q') = D(q)$. □

Réf : • FGN, Algèbre 3 : p 229.

• Tauvel, Exercices d'algèbre 2 : XV.3 (réf alternative).

↳ Dans FGN : pas fait exactement pareil (prop et existence). D'abord le calcul de $Vol(\mathcal{E}_q)$ est fait par changement de variable dans une intégrale ; cependant il est plus direct (et élégant) de mq $\mathcal{E}_q = u^{-1}(B)$ avec $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{D(q)}}$ comme ici. Ensuite A est le même ensemble, mais la norme considérée sur Q n'est pas la même : dans FGN c'est $q \mapsto \max_{x \in B} |q(x)|$; cependant celle prise ici ($q \mapsto \max_{x \in K} q(x)$) est plus appropriée car les propriétés de A (compacité, convexité) sont immédiates.

↳ Dans Tauvel : qq différences, et pas preuve de l'unicité.

↳ Complément : corollaire classique, application principale de ce th. Aussi dans FGN.

↳ Rappel : th de diagonalisation simultanée : pour q non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$: q est déf pos ou déf neg ssi pour toute fq q' sur $\mathbb{R}^n$, q et q' sont simultanément diagonalisables.

↳ Savoir que $Vol(B) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

↳ Rq : il existe une version du th sans "centré en 0" ; l'ellipsoïde associé à q centré en c étant $\mathcal{E}_q + c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x-c) \leq 1\}$.