Leçons : 121, 230.

Produit eulérien

<u>Énoncés :</u> • Th : si f est une fonction arithmétique multiplicative avec $f \geq 0$ ou $\sum_n f(n)$ absolument convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$. En particulier si f est même complètement multiplicative et vérifie $|f(n)|<1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1-f(p)}$.

• appli 1 : $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$. Appli en probas : il n'existe pas de probabilité P sur $\mathbb{N}$ tq $\forall n \geq 1,\ P(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}$.

• appli 2 : pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \neq 0$.

⊛ Th.

Soient $N \geq 2$ et $p_1 < \dots < p_r$ les nb premiers $\leq N$. On a :

$$\prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\infty} f(p_i^k) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{r} f(p_i^{k_i})$$ par Fubini pour les séries (version ≥ 0 ou version CVA)

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=0}^{\infty} f\Big(\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\Big)$$ par multiplicativité.

En notant A_N l'ensemble des entiers ≥ 1 dont tous les diviseurs premiers sont $\leq N$, cela se réécrit $\prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n \in A_N} f(n)$ (A_N est infini mais la famille est positive ou sommable donc il n'y a pas de problème). Puisque $\mathbb{N}^*$ est l'union ↗ des A_N pour $N \geq 2$, dans les deux cas on peut faire $N \to \infty$ pour obtenir $\prod_p \sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Si f est complètement multiplicative et $|f|<1$, il suffit de remarquer que $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k) = \sum_{k=0}^{\infty} f(p)^k = \frac{1}{1-f(p)}$. □

⊛ Appli 1.

• On prend $f : n \mapsto \frac{1}{n}$, qui est complètement multiplicative, de module <1 et positive : $\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-1}}$. En passant au log, on en déduit que la série associée au produit $\sum_p \ln\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right)$ diverge. Or $\ln\left(\frac{1}{1-p^{-1}}\right) = -\ln(1-p^{-1}) \underset{p \to \infty}{\sim} p^{-1}$: la série $\sum_p \frac{1}{p}$ diverge.

- Supposons qu'une telle proba P existe. On a $\sum_p P(p\mathbb{N}) = \sum_p \frac{1}{p} = \infty$. Or $(p\mathbb{N})_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille d'evts indépendants (en effet si $p_1,\dots,p_k \in \mathbb{P}$ 2à2 $\neq$, $P(\bigcap_{i=1}^k p_i\mathbb{N}) = P(p_1\cdots p_k\mathbb{N}) = \frac{1}{p_1\cdots p_k} = \prod_{i=1}^k P(p_i\mathbb{N})$).
Le second lemme de B-C s'applique donc : $P(\overline{\lim_{p\in\mathbb{P}}}\, p\mathbb{N}) = 1$. Or $\overline{\lim_{p\in\mathbb{N}}}\, p\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples d'une infinité de nombres premiers : c'est $\{0\}$. C'est absurde (par exemple car $1 = P(\{0\}) \leq P(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$).

$\square$

⊛ Appli 2.

On fixe un $s\in\mathbb{C}$ tq $\operatorname{Re} s > 1$. On prend $f : n \mapsto \frac{1}{n^s}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}$ donc la série de terme $\frac{1}{n^s}$ est absolument convergente. De plus $f : n \mapsto \frac{1}{n^s}$ est complètement multiplicative et de module <1 : le th donne $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$.

Pour en déduire la non-annulation on va écrire le produit infini comme une exponentielle. D'abord, en notant Log la det principale du log complexe (on a bien $\frac{1}{1-p^{-s}} \notin \mathbb{R}_-$ puis $p^{-s} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$) on a
$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = -\operatorname{Log}(1-p^{-s}) \underset{p\to\infty}{\sim} p^{-s}$, et donc $\left|\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right| \underset{p\to\infty}{\sim} p^{-\operatorname{Re} s}$. Vu que $(p^{-\operatorname{Re} s})_{p\in\mathbb{P}}$ est sommable, par équivalence la série $\sum_p \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$ converge absolument.

Finalement, $\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \prod_{p\leq N} \frac{1}{1-p^{-s}} = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{p\leq N} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right) = \exp\left(\sum_p \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right)$
par convergence de la série et continuité de exp. Cela implique $\zeta(s) \neq 0$.

$\square$

Complément : Propriétés de Log utilisées dans l'appli 2 : (i) si $z\notin\mathbb{R}_-$, $\operatorname{Log}(1/z) = -\operatorname{Log} z$.
(ii) $\operatorname{Log}(1-z) \underset{z\to 0}{\sim} -z$.

Preuve.
(i) Cela découle de la formule $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, avec Arg l'argument dans $]-\pi;\pi]$ (qui se montre par homotopie). En effet $\operatorname{Log}(1/z) = \ln|1/z| + i\operatorname{Arg}(1/z) = -\ln|z| - i\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Log} z$.
(ii) Cela découle du DSE $\operatorname{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ pour $z\in D(0,1)$ (csq du th d'analyticité et du calcul des dérivées de Log en 1).

$\square$

Réf :
- QZ : p 484 (th).
- Mendès-France, Tenenbaum – Les nombres premiers : p 23 (supplément sur le comportement de $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$).

↳ Essentiellement : pas de réf. Le th (produit eulérien) est fait par QZ mais pas exactement pareil. Ici : Fubini pour les séries. Mieux.

↳ Définir dans le plan fonction multiplicatives et complètement multiplicatives.

↳ On note $\prod_p = \lim_{N\to\infty} \prod_{p\leq N}$ (de m̂ pour Σ) pour ne pas confondre avec la CVA/sommabilité. De plus on ne touche pas à la théorie des produits infinis holomorphes.

↳ À savoir : on a l'équivalent $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \underset{x\to\infty}{\sim} \ln \ln x$. On a même l'une des formules de Mertens : $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \underset{x \to \infty}{=} \ln\ln x + \gamma + \sum_{p} \left(\ln(1-p^{-1}) + \frac{1}{p} \right) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ où γ est la cte d'Euler et la somme de droite est finie car $\ln(1-p^{-1}) + \frac{1}{p} \underset{p\to\infty}{=} -\frac{1}{2p^2}$. Plus dur (surtout la seconde formule).

↳ Première solution partielle à l'inexistence de P tq $P(n\mathbb{N}) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$: proba uniforme sur $[\![0;N]\!]$, puis faire $N \to \infty$. On n'obtient cependant pas une proba. Deuxième solution partielle : loi zêta (ou de Zipf) de paramètre $s > 1$ sur $\mathbb{N}^*$, affectant la masse $\frac{1}{n^s \zeta(s)}$ au point n.

↳ ζ est holomorphe sur Π_1 car la série qui la déf CVN sur Π_σ, $\sigma > 1$.

↳ Autre preuve de la non-annulation de ζ sur Π_1. $\zeta = D(1)$, et $1^{-1} = \mu$. Or $\sigma_a(\mu) \leq 1$ donc $D(\mu)$ bien déf sur Π_1. Alors $\zeta \cdot D(\mu) = D(1 * \mu) = D(\delta_1) = 1$ et en particulier $\zeta(s) \neq 0$ pour $s \in \Pi_1$.

↳ On peut mq une fois prolongée à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, ζ ne s'annule pas sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = 1\}$ et que ses seuls zéros dans $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s \leq 0\}$ sont $-2n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. L'hypothèse de Riemann conjecture que tous les zéros restants (ceux de $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$ donc) ont pour partie réelle $1/2$.