Parties génératrices de $O(q)$ et $SO(q)$

Leçons : 108, 151, 159, 160, 161.

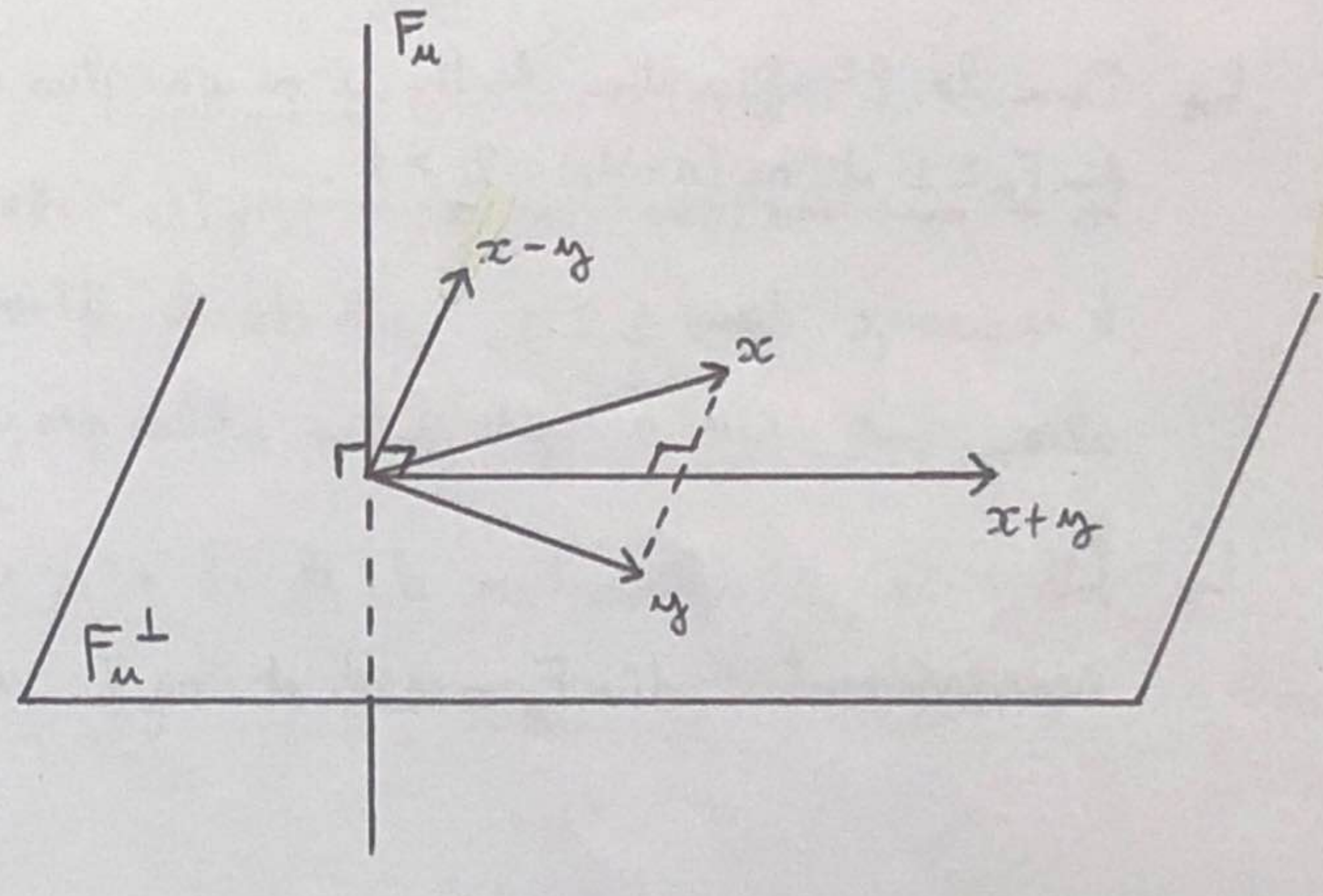
Énoncé : E un $\mathbb{R}$-ev de dim finie n, q une forme quadratique définie positive sur E. Soit $u \in O(q)$; en notant $r = rg(u - Id_E)$: → u s'écrit comme produit de r réflexions, et ce nb est minimal ;

→ si $n \geq 3$ et $u \in SO(q)$, u s'écrit comme produit de r renversements.

Preuve.

- Mq u s'écrit comme produit de r ou moins réflexions. On raisonne par réc finie sur $0 \leq r \leq n$. Initialisation : $r = 0$ cad $u = Id_E$: c'est bien le produit de 0 réflexion. Hérédité : on fixe $1 \leq r \leq n$ et on sq vrai pour v avec $rg(v - Id_E) < r$. On note $F_u = Ker(u - Id_E)$ le sev des points fixes de u : par le th du rang, $r = n - \dim F_u = \dim F_u^\perp$. Soient donc $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$ et $y = u(x)$. $y \neq x$ car $x \notin F_u$; et $y \in F_u^\perp$ car u stabilise F_u, donc $F_u^\perp$. De plus $\langle x+y, x-y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ donc $x+y \perp x-y$ (on note $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la forme polaire de q, qui est un produit scalaire, et $\|\cdot\| = \sqrt{q}$ la norme associée).

  On pose τ la réflexion orthogonale p/r à $\{x-y\}^\perp$. $\tau(x-y) = y - x$ et $\tau(x+y) = x+y$ donc (en ajoutant puis divisant par 2) $\tau(x) = y$. Ainsi $\tau u(x) = x$ et $x \in F_{\tau u}$. De plus $F_u \subset \{x-y\}^\perp$ donc pour $z \in F_u$, $\tau u(z) = \tau(z) = z$: $F_u \subset F_{\tau u}$. Finalement $F_u \subsetneq F_{\tau u}$, et $rg(\tau u - Id_E) < r$: on applique l'HR pour écrire $\tau u = \tau_1 \cdots \tau_k$ avec $k < r$. On a donc $u = \tau \tau_1 \cdots \tau_k$ produit de $k+1 \leq r$ réflexions.



- Sq $u = \tau_1 \cdots \tau_k$ avec τ_i des réflexions ; mq $k \geq r$. Pour $1 \leq i \leq k$, $F_{\tau_i} = Ker(\tau_i - Id_E)$ est un hyperplan. Si $\forall 1 \leq i \leq k$, $\tau_i(x) = x$, alors $u(x) = x$; autrement dit $\bigcap_{i=1}^{k} F_{\tau_i} \subset F_u$. Ainsi : $\dim F_u \geq \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} F_{\tau_i}\right) \geq n - k$, et $r = n - \dim F_u \leq k$.

- Lemme : si $n \geq 3$ et τ, τ' réflexions orthogonales : il existe σ, σ' renversements orthogonaux tq $\tau\tau' = \sigma\sigma'$.

  Preuve. D'abord, le cas $n = 3$ est facile : $\sigma = -\tau$, $\sigma' = -\tau'$ convient. Déduisons-en le cas général. Soit $H = F_\tau$ et $H' = F_{\tau'}$ les hyperplans stables : $\dim(H \cap H') \geq n - 2$. Soit $V \subset H \cap H' \subset F_{\tau\tau'}$ un sev de dim $n - 3$. τ, τ' et $\tau\tau'$ induisent l'identité sur V donc le stabilisent, et donc stabilisent également $V^\perp$. τ et τ' induisent des réflexions sur $V^\perp$, et $(\tau\tau')_{V^\perp} = \tau_{V^\perp} \cdot \tau'_{V^\perp}$. Mais $\dim(V^\perp) = 3$: il existe σ, σ' des renversements de $V^\perp$ tq $(\tau\tau')_{V^\perp} = \sigma\sigma'$. En prolongeant σ et σ' par l'identité sur V ils restent des renversements, et on a alors $\tau\tau' = \sigma\sigma'$.

- Tq $n \geq 3$ et $u \in SO(q)$. Par le premier point, $u = \tau_1 \cdots \tau_r$ avec τ_i des réflexions.
$1 = \det u = (-1)^r$ donc r est pair. En regroupant les réflexions par deux et appliquant le lemme, on obtient un produit de r renversements. $\square$

Réf : • Perrin : p 143 (1, 3, 4).
• FGN - Algèbre 3 : p 61 (1, 2).

↳ En particulier : $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales, $SO(q)$ est engendré par les renversements orthogonaux.

↳ Ce résultat est parfois appelé "th de Cartan - Dieudonné".

↳ Dans Perrin : le 2e point (minimalité de r) n'est pas montré ; il est dans FGN.

↳ Dans les points 2 et 3 on utilise le résultat suivant. Si $H_1, \dots, H_k$ hyperplans, $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) = n - \mathrm{rg}(\ell_1, \dots, \ell_k)$ en prenant $\ell_1, \dots, \ell_k \in E^*$ tq $H_i = \ker \ell_i$; en particulier $\mathrm{rg}(\ell_1, \dots, \ell_k) \leq k$, et $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) \geq n - k$.

↳ Ce résultat est facile à montrer par dualité : $\bigcap_{i=1}^{k} H_i = \bigcap_{i=1}^{k} \{\ell_i\}^{\circ} = \mathrm{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)^{\circ}$ a pour dimension $n - \dim \mathrm{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k) = n - \mathrm{rg}(\ell_1, \dots, \ell_k)$. En particulier une bonne idée, pour améliorer le recasage dans 159, est de le démontrer rapidement en "lemme" au début (quitte à aller vite sur un point qui n'utilise pas la dualité : le schéma ou le point 4 par ex).

↳ Dans la 2e affirmation du th il n'y a plus minimalité. En effet si u est un renversement, c'est un produit de 1 renversement mais $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E) = 2 > 1$.