

Énoncé : pour E un K -ev on note $\Delta(E) \subset L(E)$ l'ensemble des endomorphismes diagonalisables.
 Si $\mathbb{F}_q$ est un corps fini : $|\Delta(\mathbb{F}_q^n)| = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ \sum_{k=1}^q \alpha_k = n}} \frac{|GL(\mathbb{F}_q^n)|}{\prod_{k=1}^q |GL(\mathbb{F}_q^{\alpha_k})|}$, où $|GL(\mathbb{F}_q^m)| = \prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i)$.

Preuve.

• On note $\mathcal{E} = \left\{ (E_k)_{1 \leq k \leq q} \text{ famille de rev de } \mathbb{F}_q^n \mid \mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{k=1}^q E_k \right\}$. On fixe $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq q}$ une énumération de $\mathbb{F}_q$, et on définit $\psi: \begin{cases} \Delta(\mathbb{F}_q^n) \rightarrow \mathcal{E} \\ u \mapsto (\ker(u - \lambda_k \text{Id}))_{1 \leq k \leq q} \end{cases}$: on a ψ bijectif.

↳ Bijectif. Si $u \in \Delta(\mathbb{F}_q^n)$, $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{Id}) = \bigoplus_{k=1}^q \ker(u - \lambda_k \text{Id})$ en rajoutant les λ_k à $\ker(u - \lambda_k \text{Id}) = \{0\}$.

↳ Injective. Si $u, v \in \Delta(\mathbb{F}_q^n)$ tq $\psi(u) = \psi(v)$: pour $1 \leq k \leq q$, $\ker(u - \lambda_k \text{Id}) = \ker(v - \lambda_k \text{Id})$. On note E_k ce rev : u et v coïncident sur E_k . Or $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{k=1}^q E_k$: $u = v$.

↳ Surjective. Soit $(E_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{E}$: puisque $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{k=1}^q E_k$ on peut def $u \in L(\mathbb{F}_q^n)$ tq pour $1 \leq k \leq q$, $u|_{E_k} = \lambda_k \text{Id}_{E_k}$. Alors pour $1 \leq k \leq q$, $\ker(u - \lambda_k \text{Id}) = E_k$, ce qui implique d'une part $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{k=1}^q \ker(u - \lambda_k \text{Id})$ et $u \in \Delta(\mathbb{F}_q^n)$; d'autre part $(E_k)_{1 \leq k \leq q} = \psi(u)$.

On a donc $|\Delta(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathcal{E}|$. On se donne $\mathcal{E}_\alpha = \{ (E_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{E} \mid \forall 1 \leq k \leq q, \dim E_k = \alpha_k \}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^q$ tq $\sum_{k=1}^q \alpha_k = n$, on a $\mathcal{E} = \bigsqcup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ \sum_{k=1}^q \alpha_k = n}} \mathcal{E}_\alpha$. Fixons α et décomposons $\mathcal{E}_\alpha$.

On def par $(u, (E_k)_{1 \leq k \leq q}) \mapsto (u(E_k))_{1 \leq k \leq q}$ une action de $GL(\mathbb{F}_q^n)$ sur $\mathcal{E}_\alpha$. En effet les axiomes d'action sont clairement vérifiés, et $(u(E_k))_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{E}_\alpha$ car $\mathbb{F}_q^n = u(\mathbb{F}_q^n) = \bigoplus_{k=1}^q u(E_k)$, et pour $1 \leq k \leq q$, $\dim u(E_k) = \dim E_k = \alpha_k$. Cette action est de plus transitive : en effet prenons $(E_k)_{1 \leq k \leq q}, (F_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{E}_\alpha$. Soient B_k et B'_k des bases de E_k et F_k : $B = (B_1, \dots, B_q)$ et $B' = (B'_1, \dots, B'_q)$ sont des bases de $\mathbb{F}_q^n$. Soit $u \in GL(\mathbb{F}_q^n)$ tq $u(B) = B'$: pour $1 \leq k \leq q$, $u(E_k) = u(\text{Vect } B_k) = \text{Vect } u(B_k) = \text{Vect } B'_k = F_k$.

On va appliquer la formule des classes ; avant cela regardons le stabilisateur de $(E_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{E}_\alpha$.
 $u \in \text{Stab}((E_k)_{1 \leq k \leq q}) \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq q, u(E_k) = E_k \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq q, u \text{ stabilise } E_k$. Cela mq le stabilisateur est en bijection avec $\prod_{k=1}^q GL(E_k)$, donc avec $\prod_{k=1}^q GL(\mathbb{F}_q^{\alpha_k})$ (notons que $GL(\{0\}) = L(\{0\}) = \{\text{Id}_{\{0\}}\}$).

La formule des classes s'écrit $|\mathcal{E}_\alpha| = \frac{|GL(\mathbb{F}_q^n)|}{\prod_{i=1}^q |GL(\mathbb{F}_q^{\alpha_i})|}$, d'où :

$$|\Delta(\mathbb{F}_q^n)| = |\mathcal{E}| = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i = n}} |\mathcal{E}_\alpha| = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^q \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i = n}} \frac{|GL(\mathbb{F}_q^n)|}{\prod_{i=1}^q |GL(\mathbb{F}_q^{\alpha_i})|}.$$

• Rappelons pour compléter ceci le calcul de $|GL(\mathbb{F}_q^m)|$ pour $m \in \mathbb{N}$.

$GL(\mathbb{F}_q^m)$ est en bijection avec l'ens des bases de $\mathbb{F}_q^m$, par action simplement transitive du premier sur le second. On choisit une base c'est choisir, pour $1 \leq i \leq m$, $e_i \in \mathbb{F}_q^m \setminus \text{Vect}\{e_j; 1 \leq j \leq i-1\}$: il y a $q^m - q^{i-1}$ choix à chaque étape, d'où un cardinal égal à $\prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i)$. $\square$

Complément : Une autre propriété de $\Delta(\mathbb{F}_q^n)$ est que, pour $u \in L(\mathbb{F}_q^n)$: $u \in \Delta(\mathbb{F}_q^n) \Leftrightarrow u^q = u$.

En effet : $u \in \Delta(\mathbb{F}_q^n) \Leftrightarrow \pi_u$ est scindé à racines simples

$$\Leftrightarrow \pi_u \mid \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} (X - \lambda) = X^q - X$$

$$\Leftrightarrow X^q - X \text{ annule } u.$$

$\square$

Ref : • NHH GGE : p 66.

• Romaldi : p 151 (réf alternative).

↳ Dans la réf, fait avec des matrices $(\Delta_n(\mathbb{F}_q))$. Même preuve, mais bien plus naturel avec des endomorphismes.

↳ Romaldi : utilise le complément en lemme pour dire que γ est bien définie (avec lemme des moyennes). Pas nécessaire car u diagonalisable sur $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$.