Th de Lie - Kolchin

Leçons : 103, 106, 150, 154, 157.

Énoncés :
- Lemme : si G est un groupe topologique connexe, son groupe dérivé $D(G)$ est aussi connexe.
- Th : tout sg connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.

⊛ Lemme.

On note $S = \{[x;y] \,;\, (x,y) \in G^2\}$. G^2 est connexe et $[\cdot,\cdot]$ est continue donc S est connexe. Il est stable par inverse (en effet $[x,y]^{-1} = [y,x]$) donc si l'on pose $S_n = \{s_1 \cdots s_n \,;\, s \in S^n\}$ pour $n \geq 1$, $D(G) = \langle S \rangle = \bigcup_{n \geq 1} S_n$. S^n est connexe et le produit est continu donc S_n est connexe. Finalement le neutre est commun à tous les S_n, donc leur union $D(G)$ est connexe. □

⊛ Th.

- Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ vérifiant les hypothèses. Si G est abélien il est cotrigonalisable (car toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$), supposons pour la suite qu'il ne l'est pas. Soit $m \in \mathbb{N}$ minimal tq $D^m(G) = \{id\}$ par hyp ; puisque G n'est pas abélien, $m \geq 2$. On pose $A = D^{m-1}(G)$: lui est abélien puisque $D(A) = \{id\}$. De plus $m-1 \geq 1$ donc A est un groupe dérivé : il est caractéristique, et en particulier stable par les automorphismes intérieurs de G, cad $A \triangleleft G$.
- Soit $P = \{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \,|\, Ax \subset \mathbb{C}x\}$ l'ensemble des vecteurs propres $\neq 0$ communs aux matrices de A. A est abélien donc cotrigonalisable : si $(e_1, \dots, e_n)$ cotrigonalise A, $e_1 \in P$. Donc $P \neq \emptyset$. Si $a \in A$ et $x \in P$ on note $\lambda(a,x)$ la vp associée à a et x. Si $g \in G$, $g^{-1}ag \in A$ puisque $A \triangleleft G$, et on a $agx = g(g^{-1}ag)x = g(\lambda(g^{-1}ag, x)x) = \lambda(g^{-1}ag, x)\, gx$: $gx \in P$ avec $\lambda(a, gx) = \lambda(g^{-1}ag, x)$.
On fixe $x \in P$ (jusqu'à la fin). L'application $a \mapsto \lambda(a,x)$ est continue sur A (en effet si $1 \leq i \leq n$ tq $x_i \neq 0$, $\lambda(a,x) = \frac{(ax)_i}{x_i}$) ; si $a \in A$, $g \mapsto g^{-1}ag$ est continue sur G. Par composition $g \mapsto \lambda(a, gx) = \lambda(g^{-1}ag, x)$ est continue sur G, et son image est connexe. Or cette image est finie car incluse dans $\mathrm{Sp}\, a$: elle est réduite à un singleton $\{\mu(a)\}$. On a donc, pour tout $g \in G$, $gx \in E_{\mu(a)}(a)$.
- On conserve notre $x \in P$ fixé et on pose $W = \mathrm{Vect}(Gx)$: c'est un sev de $\mathbb{C}^n$ stable par G. Il est non nul. Mq $W \neq \mathbb{C}^n$.
Par l'absurde sq $W = \mathbb{C}^n$. Soit $a \in A$: d'après ce qui précède, $E_{\mu(a)}(a) = \mathbb{C}^n$ et $a = \mu(a)\, id$. On rappelle que A est un groupe dérivé : $1 = \det a = \mu(a)^n$. Ainsi $A \subset \mathbb{U}_n\, id$ est fini. Mais d'après le lemme il est aussi connexe : il est alors trivial, ce qui est absurde.

- Mtn on monte par réc sur $n \geq 1$ le th. L'initialisation à $n=1$ est triviale (et par ailleurs contenue dans le cas G abélien). Supposons le th montré pour tout $1 \leq k \leq n-1$, où $n \geq 2$ est fixé.

D'après tout ce qui précède, il existe un sev W de $\mathbb{C}^n$ stable par G qui est non nul et propre. Soient W' un supplémentaire de W, une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$, $k = \dim W$
et P la matrice de passage de cette base à la base canonique. On peut alors écrire, pour $g \in G$, $PgP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha(g) & \beta(g) \\ 0 & \gamma(g) \end{bmatrix}$ où $\alpha(g) \in GL_k(\mathbb{C})$, $\beta(g) \in M_{k,n-k}(\mathbb{C})$, $\gamma(g) \in GL_{n-k}(\mathbb{C})$.

$\alpha : G \to GL_k(\mathbb{C})$ et $\gamma : G \to GL_{n-k}(\mathbb{C})$ sont des morphismes de groupes continus, donc $\alpha(G)$ et $\gamma(G)$ sont des sg connexes résolubles (de $GL_k(\mathbb{C})$ et $GL_{n-k}(\mathbb{C})$ respectivement).
Par HR on trouve des bases de W et W' qui cotrigonalisent $\alpha(G)$ et $\gamma(G)$; en les concaténant et en faisant agir P on obtient une base de G qui cotrigonalise G. $\square$

Complément : Toute partie de $M_n(\mathbb{C})$ dont les éléments commutent 2à2 est cotrigonalisable.

Preuve. Soit $F \subset M_n(\mathbb{C})$ dont les éléments commutent 2à2. Si toute matrice de F est scalaire c'est bon. Sinon soit $f \in F$ non scalaire, et soit $V \subset \mathbb{C}^n$ un espace propre de f : sa dimension k vérifie $1 \leq k \leq n-1$. Par hyp F stabilise V. On conclut comme dans la dernière partie de la preuve du th (réc sur n, application de l'HR à k et $n-k$). $\square$

Réf :
- NHHGG 1 : p 238.
- Chambert-Loir – Algèbre corporelle : p 90 (réf alternative + complément)

↳ Noter qu'un sg de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable ssi il est conjugué à un sg de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$.

↳ Ici on prend pour déf de résoluble qu'il existe $m \geq 1$ tq $D^m(G)$ soit trivial. Une autre est qu'il existe $\{e\} = G_0 \triangleleft \cdots \triangleleft G_m = G$ tq G_{i+1}/G_i est abélien pour $0 \leq i \leq m-1$.
On utilise que si $\varphi : G \to G'$ est un morphisme et G résoluble, $\varphi(G)$ l'est encore.

↳ Les preuves des deux réf sont légèrement différentes ; celle de NHHGG 1 est mieux organisée. Le complément n'est cependant que dans l'autre, et la preuve du lemme y est mieux.

↳ Le lemme peut se généraliser : si S est une partie connexe et contenant le neutre d'un groupe topologique, $\langle S \rangle$ est connexe. Ici l'ens des commutateurs est stable par inverse donc on peut économiser un argument (preuve directe dans la 2e réf).

↳ Le résultat est vrai sur $\mathbb{R}$ en ajoutant l'hypothèse que tout $g \in G$ est trigonalisable. Il est aussi vrai sur tout corps algébriquement clos en considérant la topologie de Zariski (dans les deux cas : m̂ preuve).

↳ Ce résultat est une réciproque partielle du fait que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$ est connexe résoluble (fait ds les deux réf).
Il est d'ailleurs maximal (fait dans NHHGG 1).