Isométries du cube

Leçons : 101, 105, 161, 181, 191.

Énoncés : • Lemme : si X est une partie finie de $\mathbb{R}^3$ admettant un centre de symétrie, alors $Is(X) \simeq Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

• Th : on considère le cube $C = \{\pm 1\}^3 \subset \mathbb{R}^3$: $Is^+(C) \simeq S_4$ et $Is(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

⊛ Lemme.

• Soient O le centre de symétrie et s la symétrie centrale p/r à O : l'hypothèse signifie que $s \in Is(X)$. L'isobarycentre de X est fixé par toute isométrie de X, en particulier par s ; or son seul point fixe est O : c'est le barycentre. Ainsi tout $g \in Is(X)$ fixe O. Mais $\vec{g}$ et $\vec{s} = -id$ commutent, donc g et s commutent.

• On montre que $\phi : \begin{cases} Is(X) \to Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g \mapsto \left| \begin{array}{l} (g,0) \text{ si } g \in Is^+(X) \\ (sg,1) \text{ sinon} \end{array} \right. \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes.

D'abord il est bien déf car $s \in Is^-(X)$ (en effet $\det(\vec{s}) = (-1)^3 = -1$) donc si $g \in Is^-(X)$, $sg \in Is^+(X)$.

Ensuite mq c'est un morphisme : soient $g, h \in Is(X)$:

↳ si g et h sont $+$: $\phi(g)\phi(h) = (g,0)(h,0) = (gh,0) = \phi(gh)$;

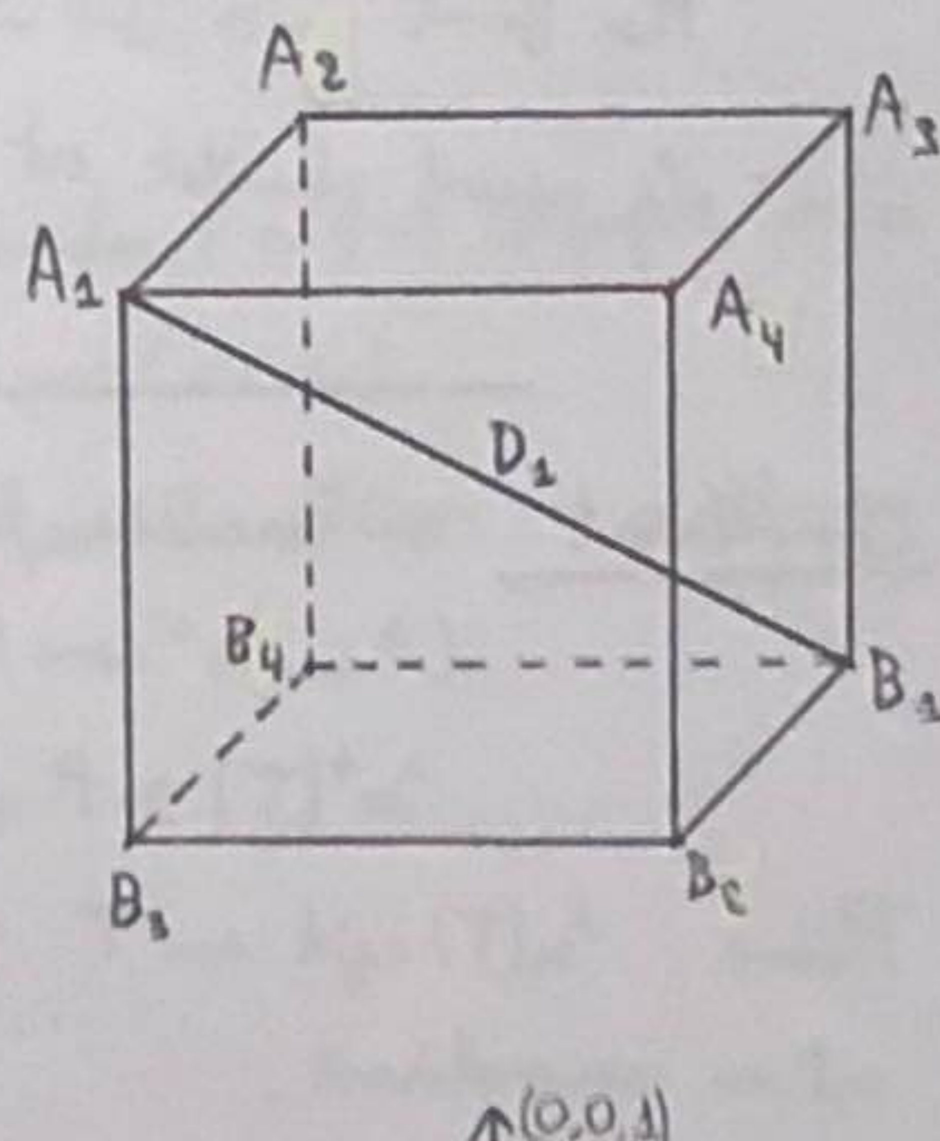
↳ si g et h sont $-$: $\phi(g)\phi(h) = (sg,1)(sh,1) = (sgsh,0) = (gh,0) = \phi(gh)$ car s et g commutent et $s^2 = id$;

↳ si g est $+$ et h est $-$ (de m̂ dans le cas contraire) : $\phi(g)\phi(h) = (g,0)(sh,1) = (gsh,1) = (sgh,1) = \phi(gh)$ car s et g commutent.

Ensuite ϕ est injectif car si $\phi(g) = (id,0)$, on a $g = id$. Enfin ϕ est surjectif : soit $(g,\varepsilon) \in Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\varepsilon = 0$ c'est $\phi(g)$, sinon c'est $\phi(sg)$ car $s^2 = id$. □

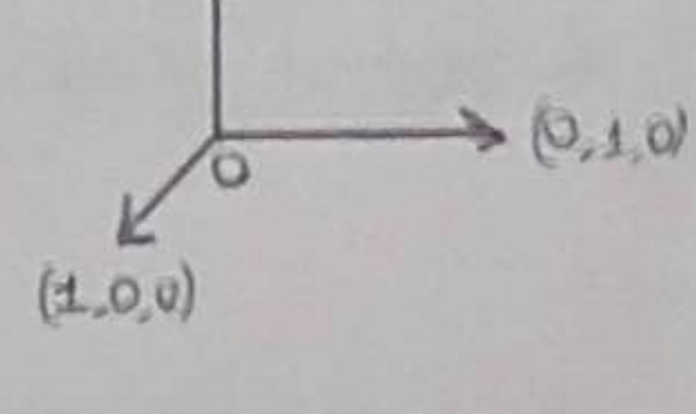
⊛ Th.

• On note $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ les huit sommets du cube $C = \{\pm 1\}^3$ comme ci-contre, et, pour $1 \leq i \leq 4$, D_i la grande diagonale $(A_i B_i)$. On montre déjà que $Is^+(C)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\}$ des grandes diagonales.



Pour $1 \leq i \leq 4$ et $g \in Is^+(C)$, $d(g(A_i), g(B_i)) = d(A_i, B_i) = 2\sqrt{3}$: cette distance n'est dans le cube atteinte qu'entre A_j et B_j pour un certain $1 \leq j \leq 4$: on a $\{g(A_i), g(B_i)\} = \{A_j, B_j\}$, et donc $g(D_i) = D_j$. Cela définit une action par le morphisme

$$\begin{cases} Is^+(C) \to \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \\ g \mapsto (D \mapsto g(D)) \end{cases}.$$

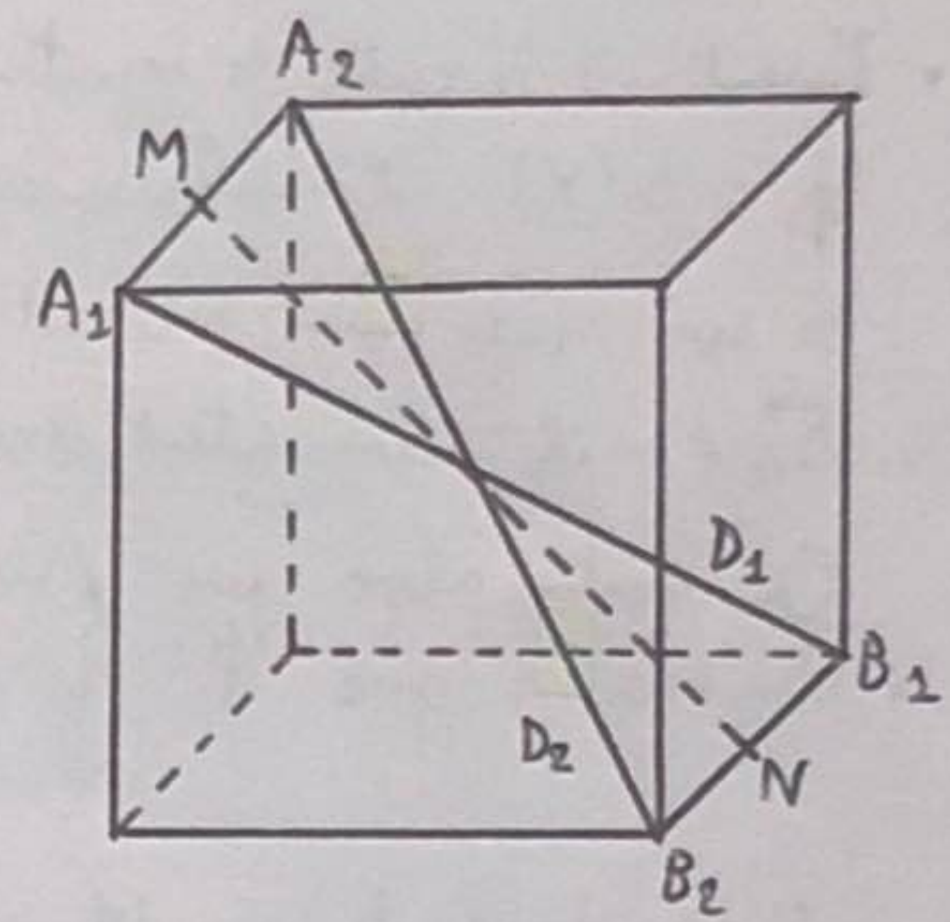


• Mq l'action est fidèle, cad que le morphisme précédent est injectif. Soit $g \in Is^+(C)$ tq $g(D_i) = D_i$ pour tout $1 \le i \le 4$; alors $\{g(A_i), g(B_i)\} = \{A_i, B_i\}$.

S'il existe $1 \le i \le 4$ tq $g(A_i) = A_i$, $g(B_i) = B_i$: on peut sq $i = 1$. $d(A_1, A_2) = 2 \neq 2\sqrt{2} = d(A_1, B_2)$ donc g n'échange pas A_2 et B_2. De m̂ pour 3 et 4 : g fixe chaque point de C. Mais (A_1, A_2, A_4, B_3) est un repère affine de $\mathbb{R}^3$: $g = id$.

Sinon, pour tout $1 \le i \le 4$ on a $g(A_i) = B_i$, $g(B_i) = A_i$. Soit s la symétrie centrale de centre $O = (0,0,0)$: sg vérifie le point précédent (on n'y utilisait pas $g \in Is^+(C)$) donc $sg = id$. Mais c'est absurde puisque $g \in Is^+(C)$: ce cas est donc impossible.

Finalement $g = id$: l'action est fidèle.



• Pour montrer la surjectivité on mq les transpositions $(D_1\ D)$, $D \in \mathcal{D}$ sont atteintes. On prend d'abord $D = D_2$. Soient M et N les milieux de $[A_1 A_2]$ et $[B_1 B_2]$. On pose σ le renversement p/r à la droite (MN).

D'abord $\sigma(A_1) = \sigma(M + \overrightarrow{MA_1}) = M + \vec{\sigma}(\overrightarrow{MA_1})$ car M est fixe pour σ.

Mais $A_1 = (1,-1,1)$, $M = (1,0,1)$, $N = (-1,0,-1)$ donc : $\overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{MN} = (0,-1,0) \cdot (-2,0,-2) = 0$ et $\overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{MN}$. Alors $\vec{\sigma}(\overrightarrow{MA_1}) = -\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA_2}$ par déf de M, et $\sigma(A_1) = A_2$. De même $\sigma(B_1) = B_2$: σ échange D_1 et D_2.

Maintenant on s'intéresse aux autres sommets. Par exemple, avec $O = (0,0,0)$, $A_3 = (-1,1,1)$ donc $\sigma(A_3) = \sigma(O + \overrightarrow{OA_3}) = O + \vec{\sigma}(\overrightarrow{OA_3})$ car $O \in (MN)$. $\overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{MN} = (-1,1,1) \cdot (-2,0,-2) = 0$ cad $\overrightarrow{OA_3} \perp \overrightarrow{MN}$: $\vec{\sigma}(\overrightarrow{OA_3}) = -\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB_3}$ et $\sigma(A_3) = B_3$. De même $\sigma(A_4) = B_4$. Ainsi on a d'une part $\sigma(C) = C$ donc $\sigma \in Is^+(C)$ (car $\det \vec{\sigma} = (-1)^2 = 1$), d'autre part σ stabilise D_3 et D_4. σ convient.

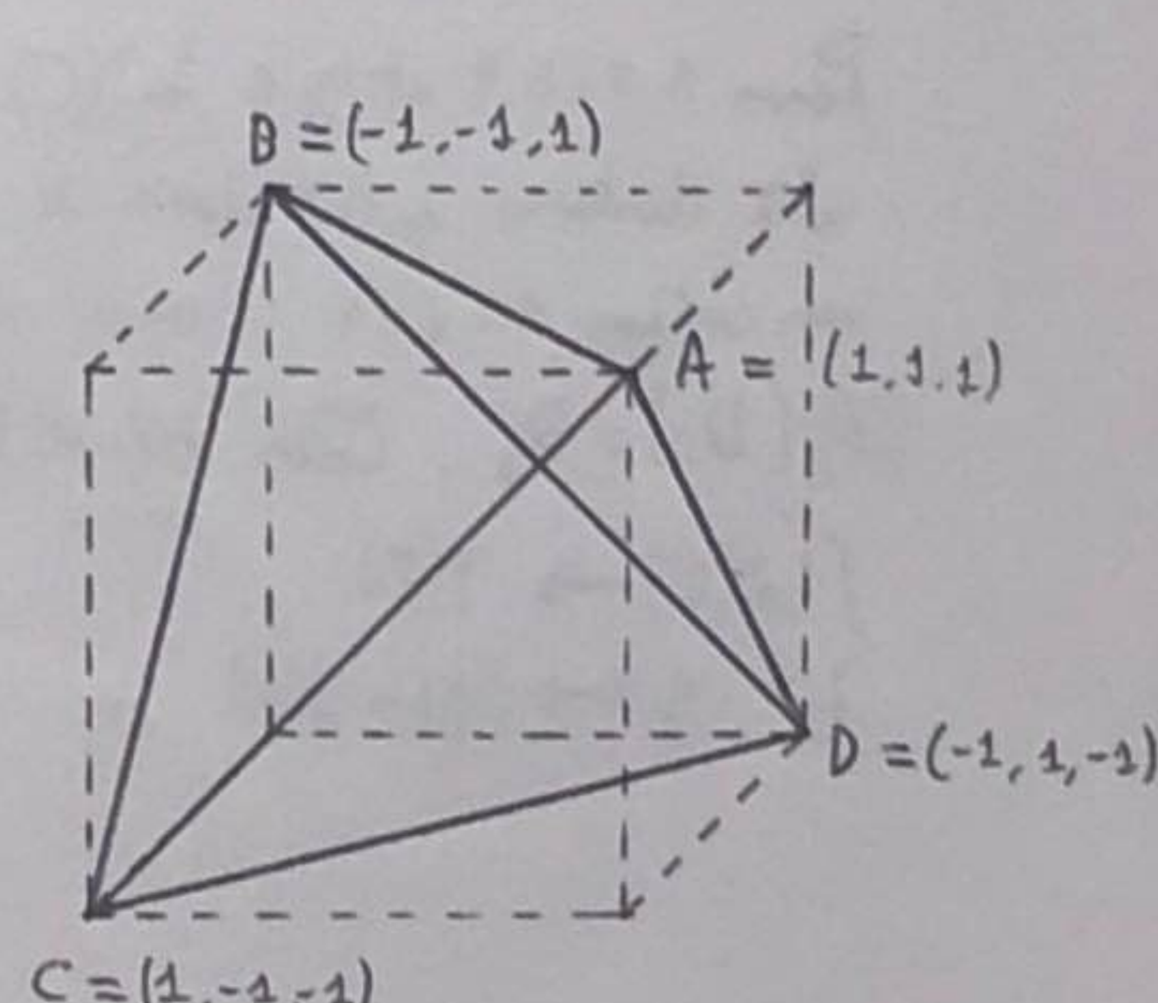
On peut faire pareil pour les transpositions $(D_1\ D_3)$ et $(D_1\ D_4)$ (pour la 1e il faut échanger A_3 et B_3 dans la déf de M et N). Vu que $\{(D_1\ D_i) \,;\, 2 \le i \le 4\}$ engendre $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ on a la surjectivité.

Au final : $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4$.

• Le second résultat est l'application directe du lemme. □

Complément : on considère le tétraèdre $T = \{A, B, C, D\}$ ci-contre ("inscrit" dans le cube précédent ; il est bien régulier) :

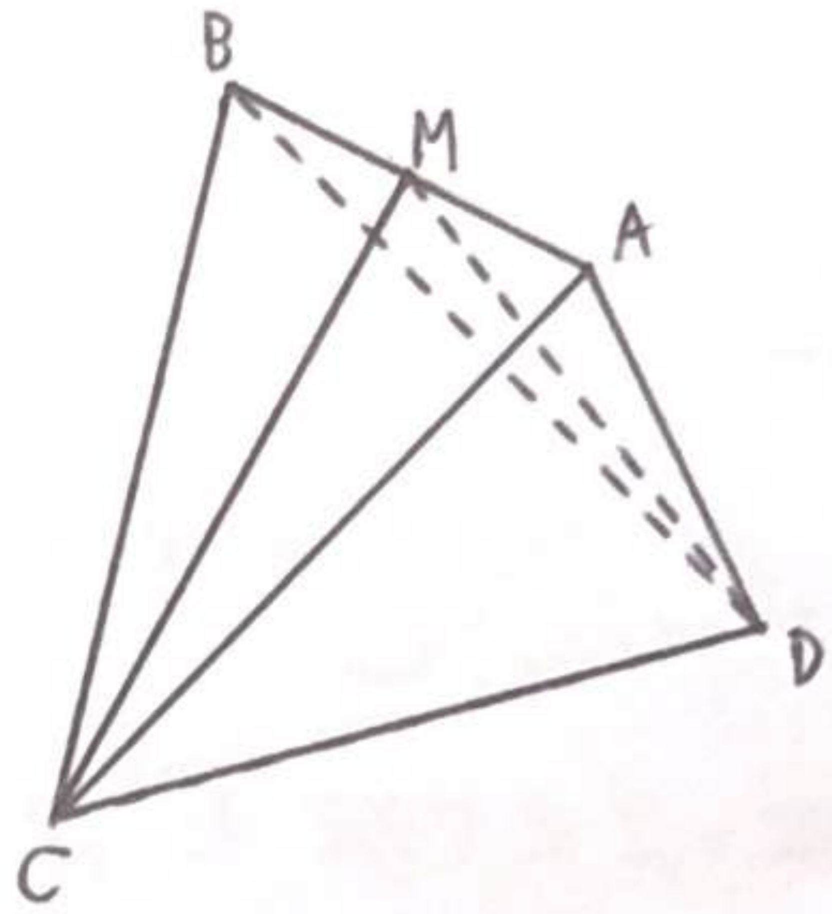
$Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$ et $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4$.



Preuve. $Is(T)$ agit sur T par $\begin{cases} Is(T) \to \mathfrak{S}(T) \\ g \mapsto g|_T \end{cases}$. Mq ce morphisme est un isomorphisme.

D'abord si $g|_T = id$, T constitue un repère affine donc $g = id$: l'action est fidèle (le morphisme est injectif).

Pour la surjectivité il suffit de mq on obtient toutes les transpositions : on considère par exemple $(A\,B)$. Soient M le milieu de $[AB]$ et Π le plan (MCD). On pose τ la réflexion p/r au plan Π. $C, D \in \Pi$ donc sont fixés par τ. On a $\tau(A) = \tau(M + \vec{MA})$ $= M + \vec{\tau}(\vec{MA})$ car $M \in \Pi$. $M = (0,0,1)$ donc $\vec{MA} \cdot \vec{MC}$ $= (1,1,0) \cdot (1,-1,-2) = 0$ et $\vec{MA} \cdot \vec{MD} = (1,1,0) \cdot (-1,1,-2) = 0$: $\vec{MA} \perp \Pi$. Alors $\vec{\tau}(\vec{MA}) = -\vec{MA} = \vec{MB}$ par déf de M, et $\tau(A) = B$. Ceci implique (puisque $\tau^2 = id$) $\tau(B) = A$: $\tau|_T = (A\,B)$.



On a bien un isomorphisme $Is(T) \simeq \mathfrak{S}(T) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Pour le second point, $Is^+(T)$ est le noyau de $\begin{cases} Is(T) \to \{\pm 1\} \\ g \mapsto \det \vec{g} \end{cases}$ et n'est pas égal à $Is(T)$ entier (le τ précédent est dans $Is^-(T)$) donc il est d'indice 2. On passe à l'isomorphisme : $\mathfrak{A}_4$ étant l'unique sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'indice 2, on a $Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$. $\square$

Réf : Caldero, Germoni - HH GG1 (p 362 : lemme, p 363 : complément, p 364 : AA).

↳ Si court (a priori non) : ajouter le complément.

↳ Énoncer le lemme en général plutôt que de ne le montrer que pour le cube permet de faire appel plus fortement au barycentre, et ainsi de mieux recaser dans 181. Les milieux sont aussi des barycentres.

↳ Attention dans la réf il y a une erreur sur le dessin du cube : les sommets sont mal numérotés.

↳ À la fin du complément on utilise que si $n \geq 2$, l'unique sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$. En effet si H est un tel sg, il est distingué et $\mathfrak{S}_n / H \simeq \{\pm 1\}$. En notant φ cet isomorphisme, $\varphi \circ \pi_H : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ est non trivial donc égal à ε. Finalement $H = \mathrm{Ker}\, \pi_H = \mathrm{Ker}\, \varepsilon = \mathfrak{A}_n$.

↳ Rappel : toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ est affine.

↳ Si X et X' sont semblables, les groupes $Is(X)$ et $Is(X')$ sont isomorphes (en fait conjugués par la similitude), de même pour Is^+. On peut donc travailler avec le cube que l'on veut.

↳ On pourrait aussi définir les cubes etc de façon plus avancée par la théorie des polyèdres. Les groupes obtenus sont bien sûr les mêmes.

↳ Les groupes Is^+ et Is des solides platoniciens sont :

- tétraèdre : $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$;
- cube et octaèdre : $\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- dodécaèdre et icosaèdre : $\mathfrak{A}_5, \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

↳ Savoir faire le lien entre les permutations et les isométries.