Théorème spectral

Références

- Algèbre - Gourdon (page 244 de la 2ème édition)

Théorème 1. *Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien. Alors il existe une base orthonormée (pour le produit scalaire) de E qui est aussi orthogonale pour q.*

Proof. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E. On définit l'ensemble $S = \{x \in E, \langle x, x \rangle = 1\}$ qui est la sphère unité de E. Comme S est fermé (car c'est l'image réciproque de 1 par la fonction continue $x \longmapsto \langle x, x \rangle$), et comme S est borné pour la norme $|| \cdot ||$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit que S est un compact de E (car les compacts de E sont les fermés bornés).

Comme q est continue sur E (comme polynôme homogène de degré deux), alors q admet un maximum sur S que l'on note λ. Soit $u \in E$ tel que q atteigne λ en ce vecteur (c'est-à-dire $q(u) = \lambda$).

On définit la forme quadratique q_λ sur E suivante :

$$q_\lambda(x) = \lambda \langle x, x \rangle - q(x)$$

pour tout $x \in E$. Il s'agit bien d'une forme quadratique car l'ensemble des formes quadratiques forme un espace vectoriel.

Montrons que q_λ est une forme quadratique positive. Soit $x \neq 0 \in E$ et montrons que $q_\lambda(x) \geq 0$. Comme $\frac{x}{\sqrt{\langle x,x \rangle}} \in S$, et que $\lambda = \max_{y \in S} q(y)$, on en déduit que $q\left(\frac{x}{\sqrt{\langle x,x \rangle}}\right) \leq \lambda$. Par homogénéité de q, on en déduit que $q(x) \leq \lambda \langle x, x \rangle$ et donc que $0 \leq q_\lambda(x)$. On conclut que q_λ est une forme quadratique positive.

Montrons que $Vect(u)^\perp \subseteq Vect(u)^{\perp_q}$. Soit $x \in Vect(u)^\perp$. Alors $\langle x, u \rangle = 0$. Montrons que $x \in Vect(u)^{\perp_q}$. On note φ la forme polaire de q. Il suffit de montrer que $\varphi(x, u) = 0$. Pour cela on commence par utiliser la positivité de la forme quadratique q_λ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz associée à cette forme quadratique. On note φ_λ la forme polaire de q_λ. Elle vérifie pour tout $x, y \in E$, $\varphi_\lambda(x, y) = \lambda \langle x, y \rangle - \varphi(x, y)$

(par dédoublement). Ainsi par l'inégalité de Cauchy-Scwhartz appliquée à la forme quadratique q_λ :

$$\varphi_\lambda(x,u)^2 \leq q_\lambda(x)q_\lambda(u)$$

Or $q_\lambda(u) = \lambda\langle u,u\rangle - q(u) = \lambda - \lambda = 0$ car $u \in S$ et car $q(u) = \lambda$. Ainsi $\varphi_\lambda(x,u)^2 = 0$ et donc $\varphi_\lambda(x,u) = 0$. D'après la définition de cette forme polaire on a : $\lambda\langle x,u\rangle - \varphi(x,u) = 0$. Or $\langle x,u\rangle = 0$ (car $x \in Vect(u)^\perp$). Donc $\varphi(x,u) = 0$ et $x \in Vect(u)^{\perp_q}$. On en conclut l'incusion $Vect(u)^\perp \subseteq Vect(u)^{\perp_q}$.

Concluons par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel. Le théorème est vraie pour $n = 1$ en prenant comme base un vecteur unitaire. Supposons le théorème vraie pour $n-1$ et démontrons le pour n. Comme $Vect(u)$ est un espace de dimension 1, alors $Vect(u)^\perp$ est de dimension $n-1$. En considérant q' la restriction de q à $Vect(u)^\perp$ on obtient une forme quadratique sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n-1$. Par hypothèse de récurrence il existe une base $e_1,\ldots,e_{n-1}$ de $Vect(u)^\perp$ qui est orthonormée et qui est orthogonale pour q'. Comme $Vect(u) \bigoplus Vect(u)^\perp$, alors $e_1,\ldots,e_{n-1},u$ forme une base de E. De plus comme $u \in S$, alors u est unitaire et comme $e_i \in Vect(u)^\perp$ pour tout i, alors e_i est orthogonal à u. Donc $e_1,\ldots,e_{n-1},u$ est une base orthonormée de E. De plus comme $Vect(u)^\perp \subseteq Vect(u)^{\perp_q}$, on en déduit que $\varphi(e_i,u) = 0$ pour tout i. Donc $e_1,\ldots,e_{n-1},u$ est une base orthogonale pour q. On conclut par récurrence. □

Théorème 2 (Théorème spectral)**.** *Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E. Alors f est diagonalisable en base orthonormée de E.*

Proof. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire de E. On définit la fonction suivante : $\varphi(x,y) = \langle x, f(y)\rangle$ pour tout $x,y \in E$. Alors φ est une forme bilinéaire symétrique (car f est un endomorphisme auto-adjoint). On définit q la forme quadratique associée : $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$. D'après le théorème précédent, il existe une base orthonormée $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de E telle que la base est aussi orthogonale pour q. Soit $j \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $a_{i,j}$ des réels tels que $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$. Comme $\langle e_i, f(e_j)\rangle = a_{i,j}$ par q-orthogonalité, on en déduit que $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$. Donc $f(e_j) = a_{j,j}e_j$. Donc e_j est un vecteur propre de f. Ainsi $\{e_1,\ldots,e_n\}$ forme une base de vecteurs propres de f qui est donc diagonalisable (et la base est orthonormée). □