Algèbre (p 16-18)
Rombaldi (p 458)

DUAL DE $\mathcal{M}_n(K)$ & APPLICATIONS

Soient K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

Thm : $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$, $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(K)$: $\varphi = \mathrm{Tr}(A\,\bullet)$.

Appli 1 : Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$. Si $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2$, $\varphi(XY) = \varphi(YX)$, alors il existe $a \in K$ tel que $\varphi = a \cdot \mathrm{Tr}$.

Appli 2 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ contient une matrice inversible.

Appli 3 : Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Preuve du Thm : Posons $\Phi : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)^*$, $A \longmapsto \varphi_A = \mathrm{Tr}(A\,\bullet)$. Par linéarité de Tr, Φ est linéaire.

- Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 = \varphi_A(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$, donc $A = 0$. Ainsi, Φ est injective.
- $\dim(\mathcal{M}_n(K)) = \dim(\mathcal{M}_n(K)^*)$

Ainsi Φ est un isomorphisme, donc $\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$, $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(K)$: $\varphi = \Phi(A) = \mathrm{Tr}(A\,\bullet)$. ■

Preuve de Appli 1 : Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^*$ vérifiant l'hypothèse. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi = \mathrm{Tr}(A\,\bullet)$.
Pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(K)^2$, $\mathrm{Tr}(AXY) = \varphi(XY) = \varphi(YX) = \mathrm{Tr}(AYX) = \mathrm{Tr}(XAY)$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = \Phi(AX - XA)(Y) = 0$, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, $AX - XA \in \mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, i.e. $AX = XA$.
(i.e. $A \in Z(\mathcal{M}_n(K))$).

> Instant calcul : on a $Ae_i = \left(\sum_{k=1}^n a_{p,k}\delta_{k,i}\right)_p = (a_{p,i})_p = \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k$, ou autrement dit Ae_i est la i^e colonne de A. En particulier, $E_{i,j}e_k = \delta_{k,j}e_i$ car les colonnes de $E_{i,j}$ sont nulles, sauf la j^e qui est e_i.
>
> De plus, en notant $E_{i,j} = (\varepsilon_{p,q} = \delta_{p,i}\delta_{q,j})_{p,q}$, $E_{i,j}A = \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_{p,k}a_{k,q}\right)_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^n \delta_{p,i}\delta_{k,j}a_{k,q}\right)_{p,q} = (\delta_{p,i}a_{j,q})_{p,q}$

En particulier, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(AE_{i,j})e_j = A(E_{i,j}e_j) = Ae_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k \qquad = (E_{i,j}A)e_j = (\delta_{p,i}a_{j,j})_p = a_{j,j}(\delta_{p,i})_p = a_{j,j}e_i$$

Ainsi, pour tout $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$, et $a_{i,i} = a_{j,j}$. Posons $a := a_{1,1}$, de sorte que $A = aI_n$. On a donc $\varphi = \mathrm{Tr}(A\,\bullet) = a\,\mathrm{Tr}$. ■

Preuve de Appli 2 : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$. Il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(K)^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi = \mathrm{Tr}(A\,\bullet)$. Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Il existe $(P,Q) \in GL_n(K)^2$ tel que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \mathrm{Diag}(I_r, 0_{n-r})$. De là, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(PJ_rQX) = \mathrm{Tr}(J_rY)$ où $Y := QXP$. Comme $(P,Q) \in GL_n(K)^2$, on a $X \in GL_n(K) \iff Y \in GL_n(K)$, donc trouver $X \in H \cap GL_n(K) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}(A\,\bullet)) \cap GL_n(K)$ revient à trouver $Y \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}(J_r\,\bullet)) \cap GL_n(K)$. Pour cela, prenons pour Y la matrice de la permutation $(1, 2, \dots, n)$. ■

Preuve de Appli 3 : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \mathrm{Tr}(A\cdot)$. Soit $A = \Theta S$, $\Theta \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ une décomposition polaire de A. D'après le théorème spectral, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$. De là,

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(\Theta P D {}^tP X) = \mathrm{Tr}({}^tP X \Theta P D) = \mathrm{Tr}(YD) \quad \text{où } Y = {}^tP X \Theta P.$$

Remarquons que $X \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Y \in O_n(\mathbb{R})$, donc chercher $X \in H \cap O_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}(A\cdot)) \cap O_n(\mathbb{R})$ revient à chercher $Y \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}(D\cdot))$. Pour cela, la matrice de la permutation $(1, 2, \dots, n)$ est orthogonale puisqu'elle change une base orthonormée en une autre base orthonormée, et $\mathrm{Tr}(DY) = 0$. ■