Gourdon Analyse [3e] p.50 +56

203, 208

ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE & THÉORÈME DE RIESZ

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Thm 1 : Si E est de dimension finie n, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Thm 2 (de RIESZ) : E est de dimension finie si et seulement si $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte.

Preuve de Thm 1 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.

- Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^n |e_i^*(x)| \cdot \|e_i\| \leqslant \alpha \|x\|_\infty$ où $\alpha = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |e_i^*(x)|$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, elle n'est pas nulle, et donc $\alpha > 0$.
- Posons $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$: c'est une isométrie pour $\|\cdot\|_\infty$ sur E, elle est donc 1-lipschitzienne, a fortiori continue, et $S := \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\} = \varphi(\{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\})$ est compacte comme image d'un compact par une application continue. Comme $\|\cdot\|$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ (puisque α-lipschitzienne d'après le premier point : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\| \leqslant \alpha \|x-y\|_\infty$), d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_0 \in S$ tel que $\beta := \min_{x \in S} \|x\| = \|x_0\| > 0$. De là, pour tout $x \in E$, $\|x\| = \|x\|_\infty \underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|}_{\in S} \geqslant \beta \|x\|_\infty$. Ainsi, $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
- Toute norme sur E est donc équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Or la relation d'équivalence est transitive, donc toutes les normes sur E sont équivalentes. ■

Preuve de Thm 2 :
- Si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont les fermés bornés, donc $\overline{B_E(0,1)}$ est compacte. En effet, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée par $M > 0$ pour $\|\cdot\|_\infty$, alors les $(e_i^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E sont bornées dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, il existe une suite extraite $(e_1^*(x_{\varphi_1(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. De même, on peut extraire $(e_2^*(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. Par extraction diagonale, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les $(e_i^*(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. De là $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Finalement, tout fermé borné vérifie la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS, a fortiori est compact.

- Supposons E de dimension infinie. Par l'absurde, supposons $\overline{B_E(0,1)}$ compacte. Il existe alors $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ tel que $\overline{B_E(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^r B_E(x_i, 1)$. Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r)$. Comme E est de dimension strictement plus grande que celle de F, $E \neq F$ et on peut considérer $x \in E \setminus F$. Comme F est de dimension finie, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F) > 0$. (En effet, $y \mapsto \|y\|$ est continue et coercive sur F qui est de dimension finie — donc les fermés bornés de F sont compacts.) Posons $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. On a $d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leqslant \|x_0 - 0\| = 1$ car $0 \in F$. Pour tout $z \in F$,

$$\|x_0 - z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \| x - \underbrace{(y + \|x-y\| z)}_{\in F} \| \geqslant \frac{d(x,F)}{\|x-y\|} = 1$$

donc $d(x_0, F) = 1$. Or $x_0 \in \overline{B_E(0,1)}$ donc il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $x_0 \in B_E(x_i, 1)$, i.e. :

$$1 > \|x_0 - \underbrace{x_i}_{\in F}\| \geqslant d(x_0, F) = 1 \quad : \text{ ABSURDE } ■$$