

On pose $\text{sinc}(0) = 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. La fonction sinc est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $\int_0^{+\infty} \text{sinc}$.

► EXISTENCE (i.e. semi-convergence) (à faire à la fin s'il reste du temps): Pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A \text{sinc} = \int_0^A \frac{1}{t} \sin(t) dt = \left[\frac{1}{t} (1 - \cos(t)) \right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{t^2} (1 - \cos(t)) dt = \frac{1 - \cos(A)}{A} - 0 + \int_0^A \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

 (NB: $1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2/2$ donc la dernière intégrale converge bien en 0). Or $\left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge, et $\frac{1 - \cos(A)}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$, donc $\int_0^{+\infty} \text{sinc}$ converge.

► Pour $\lambda > 0$, $t \mapsto f(\lambda, t) := e^{-\lambda t} \text{sinc}(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ (elle est continue en 0 et dominée par $t \mapsto e^{-\lambda t}$ qui est intégrable en $+\infty$) donc $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} f(\lambda, t) dt$ est bien définie (c'est la transformée de LAPLACE de sinc).

► $\mathcal{L}$ est (continue et) dérivable (sur $\mathbb{R}^{++}$):

► $\forall \lambda > 0$, $f(\lambda, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$

► $\forall t > 0$, $f(\cdot, t)$ est dérivable, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\cdot, t) : \lambda \mapsto -e^{-\lambda t} t \text{sinc}(t) = -e^{-\lambda t} \sin(t)$.

► $\forall \alpha > 0$, $\forall \lambda > \alpha$, $\forall t > 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right| \leq e^{-\lambda t} \leq e^{-\alpha t}$, et $\int_{\mathbb{R}^+} |e^{-\alpha t}| dt < +\infty$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\mathcal{L}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$, et $\forall \lambda > 0$, $\lambda \neq i$ donc:

$$\mathcal{L}'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) dt = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t} \sin(t) dt = -\text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-\lambda)t} dt \right) = -\text{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \right) = -\text{Im} \left(\frac{1}{i-\lambda} \right) = \frac{-1}{1+\lambda^2}$$

(NB: $\left| \frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda} \right| = \frac{e^{-\lambda t}}{|i-\lambda|} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$). De là, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall \lambda > 0$, $\mathcal{L}(\lambda) = C - \arctan(\lambda)$. Or $\forall \alpha > 0$, $\forall \lambda > \alpha$, $\forall t > 0$, $|f(\lambda, t)| \leq e^{-\alpha t}$ et $\int_0^{+\infty} |e^{-\alpha t}| dt < +\infty$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda, t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$, donc $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall \lambda > 0$, $\mathcal{L}(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda)$.

► Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{L}$ est continue en 0. Dès lors,

$$\int_0^{+\infty} \text{sinc} = \mathcal{L}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Soient $\lambda \geq 0$ et $B > A > 0$.

$$|\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)| \leq \left| \mathcal{L}(\lambda) - \int_0^A f(\lambda, t) dt \right| + \left| \int_0^A f(\lambda, t) dt - \int_0^A f(0, t) dt \right| + \left| \int_0^A f(0, t) dt - \mathcal{L}(0) \right|$$

$$\leq \left| \int_A^{+\infty} f(\lambda, t) dt \right| + \left| \int_0^A f(\lambda, t) - f(0, t) dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(0, t) dt \right|$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_A^B f(\lambda, t) dt &= \int_A^B e^{-\lambda t} \frac{\sin(t)}{t} dt = \text{Im} \left(\int_A^B \frac{1}{t} e^{(i-\lambda)t} dt \right) = \text{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{(i-\lambda)t} \right]_A^B - \int_A^B \frac{1}{t^2} \frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda} dt \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{e^{(i-\lambda)B}}{(i-\lambda)B} - \frac{e^{(i-\lambda)A}}{(i-\lambda)A} + \int_A^B \frac{e^{(i-\lambda)t}}{(i-\lambda)t^2} dt \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre $B \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_A^{+\infty} f(\lambda, t) dt = \text{Im} \left(0 - \frac{e^{(i-\lambda)A}}{(i-\lambda)A} + \int_A^{+\infty} \frac{e^{(i-\lambda)t}}{(i-\lambda)t^2} dt \right)$, donc:

$$\left| \int_A^{+\infty} f(\lambda, t) dt \right| \leq \frac{1}{|i-\lambda|A} + \frac{1}{|i-\lambda|} \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{2}{A}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\left| \int_A^{+\infty} f(\lambda, t) dt \right| \leq \varepsilon$ et $\left| \int_A^{+\infty} f(0, t) dt \right| \leq \varepsilon$. Remarque: la manipulation

précédente est nécessaire : en effet, on sait certes que $\int_0^{+\infty} f(\lambda, t) dt$ converge pour $\lambda > 0$, donc $\int_A^{+\infty} f(\lambda, t) dt$ peut être rendu arbitrairement petit en prenant A assez grand. Or ceci ne fonctionne pas pour $\lambda = 0$: c'est le but de la preuve...

De là, $|\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)| \leq 2\varepsilon + \left| \int_0^A (e^{-\lambda t} - 1) \operatorname{sinc}(t) dt \right|$. Or $|e^{-\lambda t} - 1| \leq 2$ et $\int_0^A |2| dt < +\infty$, donc d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^A (e^{-\lambda t} - 1) \operatorname{sinc}(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$. Ainsi, pour λ suffisamment proche de 0, $|\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)| \leq 3\varepsilon$: cela montre bien que $\mathcal{L}$ est continue en 0. ■