# Étude de la loi $\Gamma(a, \lambda)$

[On trouvera ce développement dispersé aux pages 82, 121, 162 du livre *Exercices de probabilités* de Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel et Meyre.]

Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$, on note $\gamma_{a,\lambda} : x \mapsto \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-\lambda a} \mathbb{1}_{x>0}$ la densité de la loi $\Gamma(a, \lambda)$.

1 ▸ La fonction caractéristique $\varphi_{a,\lambda}$ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est donnée apr $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi_{a,\lambda}(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$.

2 ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet un moment d'ordre $n$ donné par $m_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{\lambda^n}$.

---

1 ▸ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $D_\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < \alpha\}$. Pour $z \in D_\lambda$ et $x > 0$, posons $f(z, x) \overset{\text{def}}{=\!=} x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - z)a}$. On a $|f(z, x)| \leqslant x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - \mathrm{Re}(z))x}$ et $\lambda - \mathrm{Re}(z) > 0$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - \mathrm{Re}(z))x} \,\mathrm{d}x < +\infty$. Ainsi,

$$\psi : z \in D_\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}} \gamma_{a,\lambda}(x) \mathrm{e}^{xz} \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} f(z, x) \,\mathrm{d}x$$

est bien définie. Soit $\alpha \in ]0, \lambda[$.

- $\forall\, z \in D_\alpha,\ f(z, \cdot)$ est mesurable,
- $\forall\, x > 0,\ f(\cdot, x)$ est holomorphe,
- $\forall\, z \in D_\alpha,\ \forall\, x > 0,\ |f(z, x)| \leqslant x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - \mathrm{Re}(z))x} \leqslant x^{a-1} \mathrm{e}^{-\alpha x}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} x^{a-1} \mathrm{e}^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x < +\infty$.

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, $\psi$ est holomorphe sur (l'ouvert) $D_\alpha$. Comme l'holomorphie est une notion locale, $\psi$ est finalement holomorphe sur $\displaystyle\bigcup_{0<\alpha<\lambda} D_\alpha = D_\lambda$.

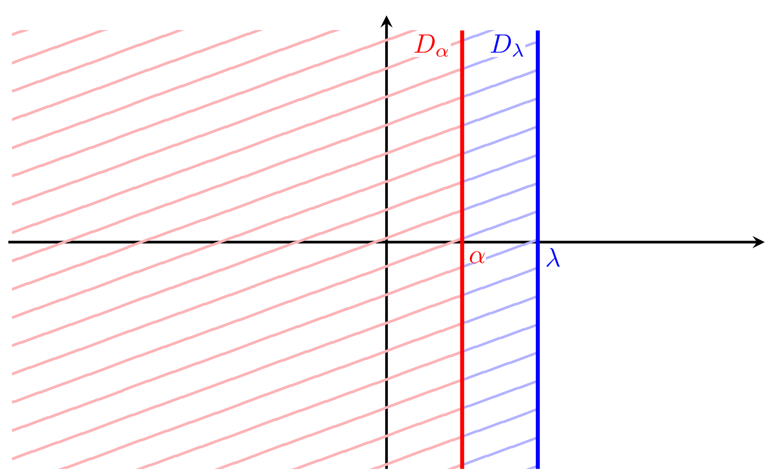


FIGURE 5.1 – Domaines $D_\alpha$ et $D_\lambda$

Par ailleurs, pour tout $t < \lambda$, en effectuant le changement de variable $y = (\lambda - t)x$

$$\psi(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - t)x} \,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda - t}\right)^{a-1} \mathrm{e}^{-y} \frac{\mathrm{d}y}{\lambda - t} = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{(\lambda - t)^a} \Gamma(a) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a$$

Comme $z \mapsto \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - z}\right)^a$ est holomorphe $D_\lambda$ et coïncide avec $\psi$ sur l'intervalle $]-\infty, \lambda[$ (qui contient un point d'accumulation), d'après le théorème des zéros isolés, $\forall\, z \in D_\lambda,\ \psi(z) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - z}\right)^a$.

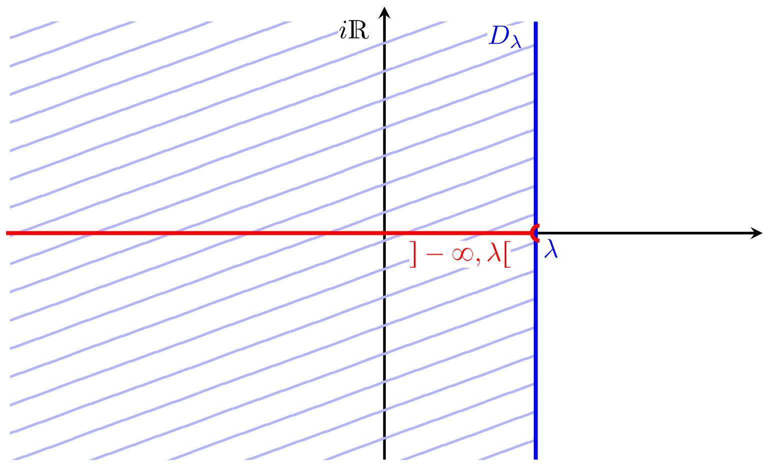


FIGURE 5.2 – Domaine pour le principe des zéros isolés

En particulier, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $it \in D_\lambda$ donc :

$$\boxed{\varphi_{a,\lambda}(t) = \psi(it) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a}$$

2 ▸ Comme $\psi$ est holomorphe, $\varphi_{a,\lambda}$ est infiniment dérivable en 0, donc la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet des moments de tout ordre. Plus précisément, soit $n \in \mathbb{N}$, le moment d'ordre $n$ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est donné par $m_n i^{-n} \varphi_{a,\lambda}^{(n)}(0)$. De là, deux rédactions possibles :

- par un récurrence immédiate : $\varphi_{a,\lambda}(t) = \lambda^a(\lambda - it)^{-a}$, donc $\varphi'_{a,\lambda}(t) = \lambda^a ia(\lambda - it)^{-a-1}$, donc $\varphi''_{a,\lambda}(t) = \lambda^a i^2 a(a+1)(\lambda - it)^{-a-2}$, etc. jusqu'à $\varphi_{a,\lambda}^{(n)}(t) = \lambda^a i^n a(a+1)\cdots(a+n)(\lambda - it)^{-a-n}$ puis on évalue en $t = 0$ pour avoir le résultat ;
- avec un développement en série entière : d'une part, par analycité,

$$\varphi_{a,\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{a,\lambda}^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n m_n \frac{t^n}{n!}$$

et d'autre part, pour $|t| < \lambda$,

$$\begin{aligned}\varphi_{a,\lambda}(t) = \lambda^a(\lambda - it)^{-a} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-a} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-a(-a-1)\dots(-a-n)}{n!} \left(-\frac{it}{\lambda}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{\lambda^n} \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

puis on invoque l'unicité du développement en série entière.

---

- Recasages : 235 (Problèmes d'interversion en analyse.), 236 (Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.), 239 (Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.), 245 (Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.), 261 (Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.)