Rambaldi (p88)
NH2G2 II (p222)

ISOMÉTRIES DU CUBE

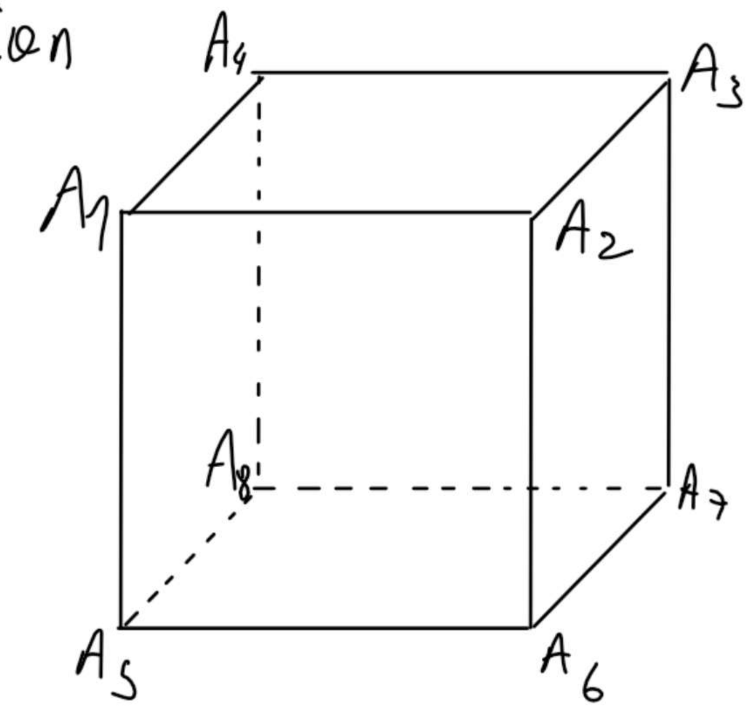
101, 104, 105
161, 191

Notons C le cube dont l'ensemble des sommets est $S = \{A_k = (\pm 1, \pm 1, \pm 1),\ 1 \leq k \leq 8\}$. Notons $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries linéaires de $\mathbb{R}^3$ conservant une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$, $Is^{\pm}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de $Is(\mathcal{E})$ de déterminant ± 1.

1 ▸ $Is(C) = Is(S)$ 2 ▸ $Is(S) \simeq Is^+(S) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (à passer) 3 ▸ $Is^+(S) \simeq \mathfrak{S}_4$

---

1 ▸ • Soit $\varphi \in Is(C)$. Remarquons que $S \subseteq S(0, \sqrt{3})$, et que par définition de "être une isométrie", φ conserve $S(0, \sqrt{3})$ (NB : "φ conserve $\mathcal{E}$" signifie que $\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, pas seulement que $\varphi(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}$). En remarquant que $S = C \cap S(0, \sqrt{3})$, il vient :



$$\varphi(S) = \varphi(C \cap S(0,\sqrt{3})) \overset{\varphi \text{ est injective } (*)}{=} \varphi(C) \cap \varphi(S(0,\sqrt{3})) = C \cap S(0, \sqrt{3}) = S$$

(* : en général, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, mais l'injectivité est nécessaire pour la réciproque.)

Donc $\varphi \in Is(S)$.

• Réciproquement, soit $\varphi \in Is(S)$. Montrons que $\varphi(C) = C$: soit $M \in C$. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_8) \in [0,1]^8$ tel que $M = \sum_{k=1}^{8} \lambda_k A_k$. Comme φ conserve S, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ tel que pour tout $k \in [\![1, 8]\!]$, $\varphi(A_k) = A_{\sigma(k)}$. De là :

$$* \ \varphi(M) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{8} \lambda_k A_k\right) \underset{\varphi \text{ est linéaire } (*)}{=} \sum_{k=1}^{8} \lambda_k \varphi(A_k) = \sum_{k=1}^{8} \lambda_k A_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{8} \lambda_{\sigma^{-1}(k)} A_k \in C$$

$$* \ M = \sum_{k=1}^{8} \lambda_k \varphi(\varphi^{-1}(A_k)) \overset{\downarrow}{=} \varphi\left(\sum_{k=1}^{8} \lambda_k A_{\sigma^{-1}(k)}\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{8} \lambda_{\sigma(k)} A_k\right) \in \varphi(C)$$

(* : Rq : j'ai fait le choix de "restreindre" l'énoncé aux isométries linéaires, car cela simplifie la rédaction, et permet de ne pas risquer de s'enfoncer dans les méandres de la géométrie affine... Pour retrouver toutes les isométries (pas nécessairement linéaires) du cube, il suffit de remarquer que modulo un changement de l'origine de l'espace affine, ces isométries sont les isométries linéaires.)

2 ▸ NB : il n'y a pas le temps de présenter cette partie à l'oral (et elle n'est pas la plus intéressante). Il faut connaître son déroulement pour pouvoir l'expliquer en deux mots à l'oral.

Posons $s_0 : x \longmapsto -x \in O(\mathbb{R}^3)$. La matrice dans la base canonique de s_0 est $-I_3$. De là, $s_0 \in Is^-(S)$ et s_0 commute avec tout $\varphi \in Is(S)$.

• Posons $f : Is(S) \longrightarrow Is^+(S) \times \langle s_0 \rangle \simeq Is^+(S) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, vérifions que c'est un morphisme de groupes.

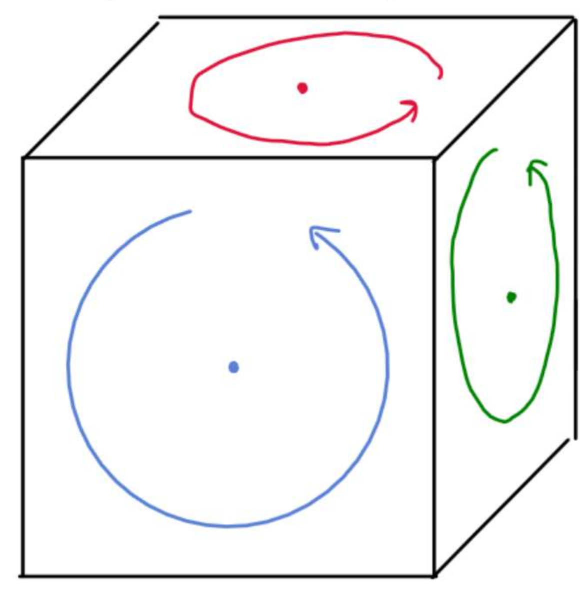
$$\varphi \longmapsto \begin{cases} (\varphi, id_{\mathbb{R}^3}) & \text{si } \varphi \in Is^+(S) \\ (\varphi s_0, s_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $(\varphi,\psi)\in Is(C)^2$. Quatre cas possibles :

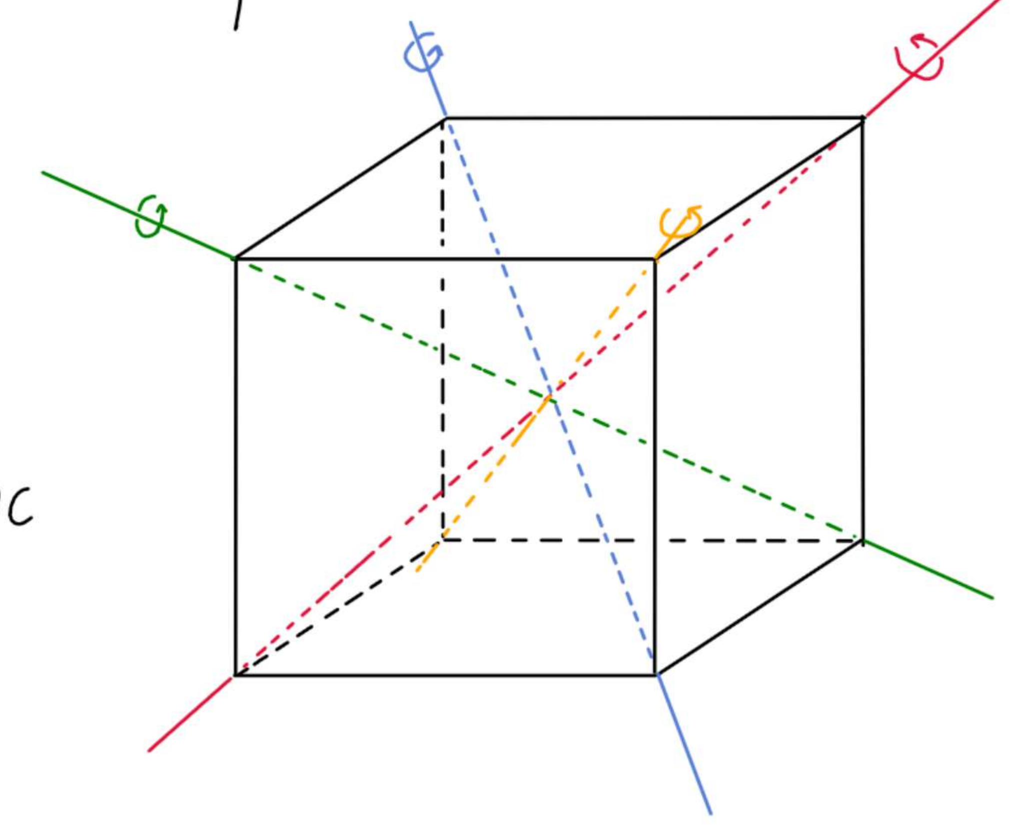
	$\varphi\in Is^+(S)$	$\varphi\in Is^-(S)$
$\psi\in Is^+(S)$	$f(\varphi\psi)=(\varphi\psi, id_{\mathbb{R}^3})$ $= f(\varphi)f(\psi)$	$f(\varphi\psi)=(\varphi\psi s_0, s_0)$ $=(\varphi s_0, s_0)(\psi, id_{\mathbb{R}^3})^{(*)}$ $= f(\varphi)f(\psi)$
$\psi\in Is^-(S)$	$f(\varphi\psi)=(\varphi\psi s_0, s_0)$ $=(\varphi, id_{\mathbb{R}^3})(\psi s_0, s_0)$ $= f(\varphi)f(\psi)$	$f(\varphi\psi)=(\varphi\psi, id_{\mathbb{R}^3})$ $=(\varphi s_0^2\psi, s_0^2)$ $=(\varphi s_0, s_0)(\psi s_0, s_0)^{(*)}$ $= f(\varphi)f(\psi)$

(*: car s_0 et ψ commutent !)

Rotations passant par les faces $(\frac{\pi}{2})$



Rotations passant par les sommets $(\frac{2\pi}{3})$

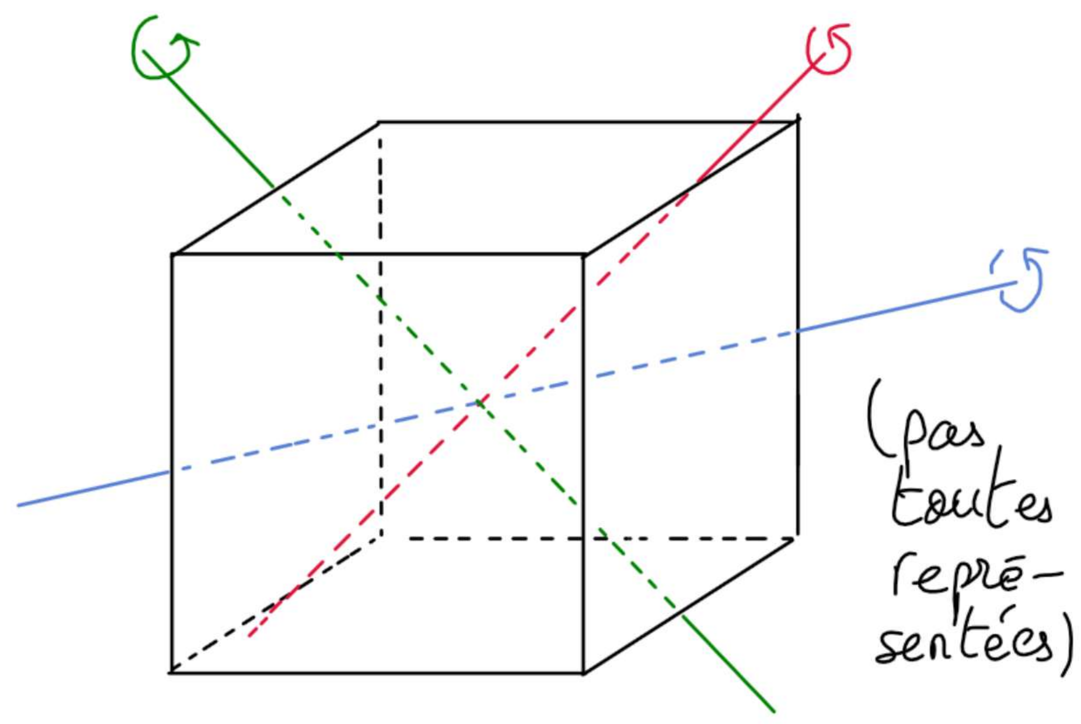


- Par ailleurs, f est injectif : en effet, pour tout $(\varphi,\psi)\in Is(S)^2$ tel que $f(\varphi)=f(\psi)$, on a $(\varphi, id_{\mathbb{R}^3})=(\psi, id_{\mathbb{R}^3})$ ou $(\varphi s_0, s_0)=(\psi s_0, s_0)$, donc $\varphi=\psi$ (car s_0 est inversible).

- Remarquons enfin que $\varphi\longmapsto\varphi s_0$ est une bijection de $Is^+(S)$ vers $Is^-(S)$, donc $\#Is^+(S)=\#Is^-(S)$, mais $Is(S)=Is^+(S)\sqcup Is^-(S)$, donc $\#Is(S)=2\#Is^+(S)=\#(Is^+(S)\times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Ainsi, f est un isomorphisme de groupes, CQFD.

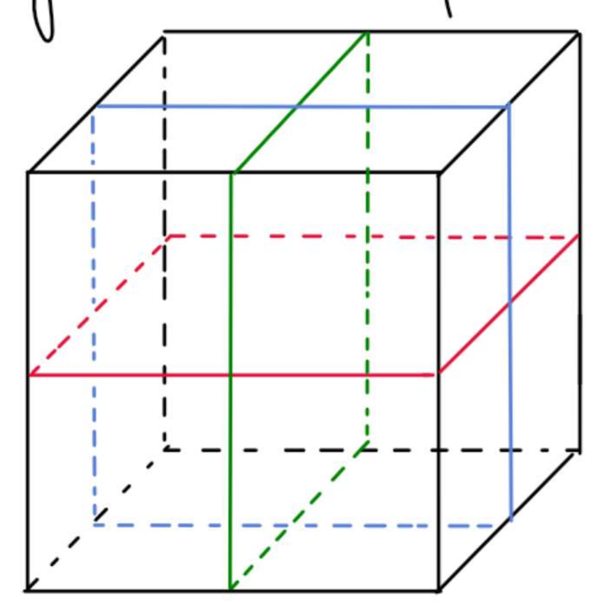
Rotations passant par les arêtes $(\frac{\pi}{2})$



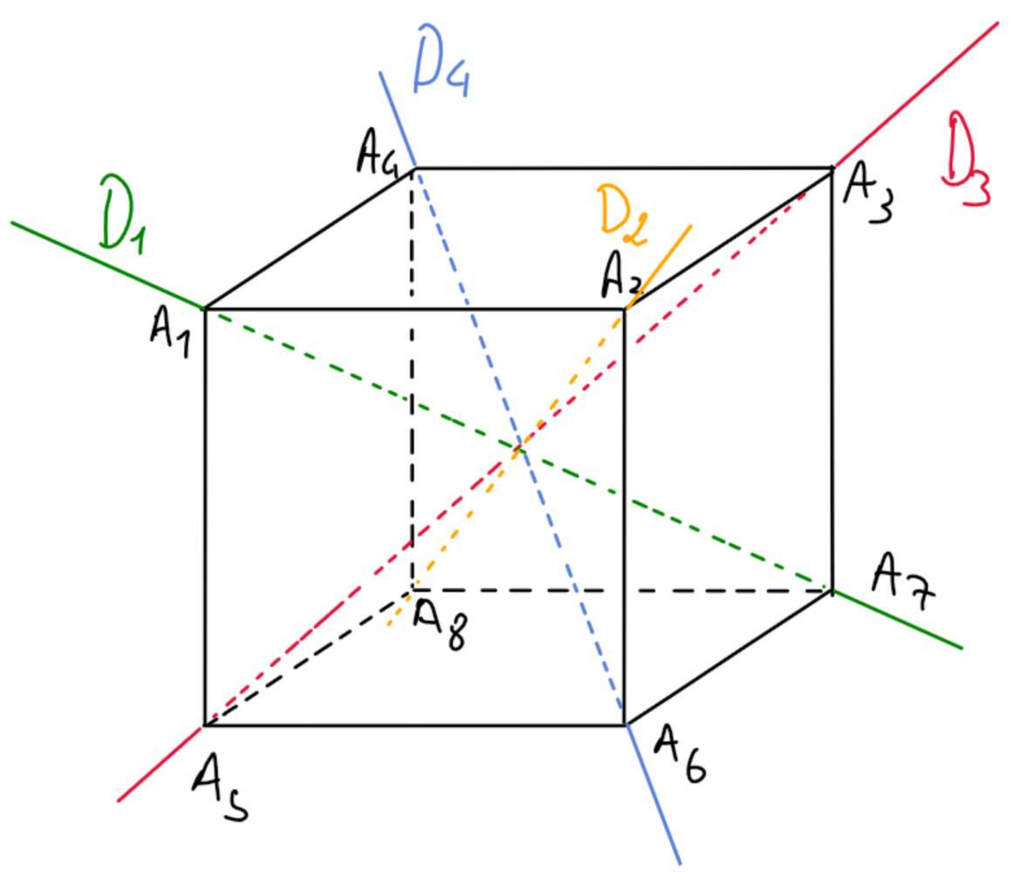
(pas toutes représentées)

3▸ Notons $D=\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales de C. Pour tout $\varphi\in Is^+(S)$, comme φ préserve S et les distances, φ conserve D, i.e. il existe $\sigma_\varphi\in\mathfrak{S}_4$ telle que pour tout $i\in[\![1,4]\!]$, $\varphi(D_i)=D_{\sigma_\varphi(i)}$. Autrement dit, $Is^+(S)$ agit sur D, et le morphisme associé à cette action est $\Phi:\varphi\longmapsto\sigma_\varphi$.

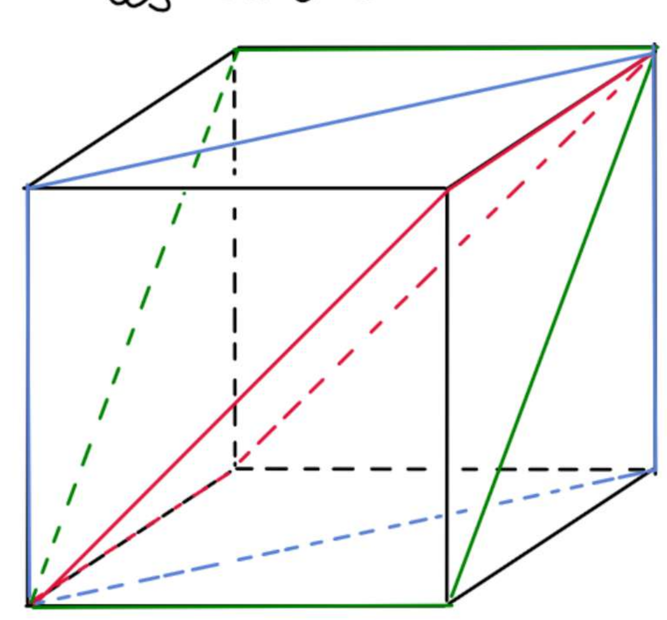
Symétries coupant les faces



Avant de poursuivre, remarquons que toute $\varphi\in Is^+(S)$ est caractérisée par $\varphi(A_1)$ et $\varphi(A_2)$. En effet, soit $(\varphi,\psi)\in Is^+(S)^2$ tel que $\varphi(A_1)=\psi(A_1)$ et $\varphi(A_2)=\psi(A_2)$. Alors $\psi\circ\varphi^{-1}(A_i)=A_i$, $i\in\{1,2\}$. Or $\psi\circ\varphi^{-1}$ est une rotation de $\mathbb{R}^3$, donc l'ensemble de ses points fixes est soit une droite, soit $\mathbb{R}^3$.
Or $\psi\circ\varphi^{-1}$ fixe A_1 et A_2, donc (A_1A_2), mais $\psi\circ\varphi^{-1}$ fixe O (par linéarité) et $O\notin(A_1A_2)$, donc $\psi\circ\varphi^{-1}$ fixe $\mathbb{R}^3$, i.e. $\psi\circ\varphi^{-1}=id_{\mathbb{R}^3}$, i.e. $\varphi=\psi$.



Symétries passant par les arêtes

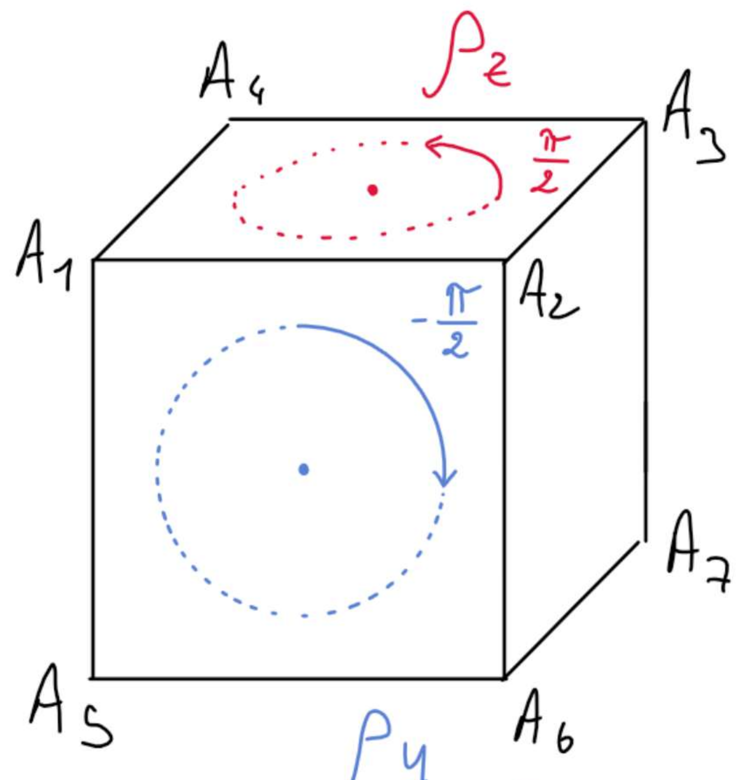


(pas toutes représentées)

▸ Montrons que l'action de $Is^+(S)$ sur D est fidèle : soit $\varphi \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ (i.e. $\forall i \in [\![1,4]\!], \varphi(D_i) = D_i$). Comme $D_1 = [A_1, A_7]$ et φ préserve D_1 et S, nécessairement $\varphi(A_1) \in \{A_1, A_7\}$.

- Si $\varphi(A_1) = A_1$, alors par conservation des distances, comme $\varphi([A_1,A_2]) = [A_1, \varphi(A_2)]$, on a $\varphi(A_2) \in \{A_2, A_4, A_5\}$, mais $\varphi(D_2) = D_2$, donc $\varphi(A_2) \in \{A_2, A_8\}$, donc $\varphi(A_2) = A_2$ puis $\varphi = id_{\mathbb{R}^3}$ d'après le point précédent.
- Si $\varphi(A_1) = A_7 = -A_1$, alors de même, $\varphi(A_2) \in \{A_3, A_6, A_8\} \cap \{A_2, A_8\}$, donc $\varphi(A_2) = A_7 = -A_2$. On montre de même $\varphi(A_4) = -A_4$. De là, φ et s_0 coïncident sur la base $(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_4})$, donc $\varphi = s_0 \in Is^+(S) \cap Is^-(S)$: c'est contradictoire.

▸ Montrons que Φ est surjectif en montrant que $\# Is^+(S) = \# \mathfrak{S}(D) = 24$: pour cela, on considère l'action de $Is^+(S)$ sur S.



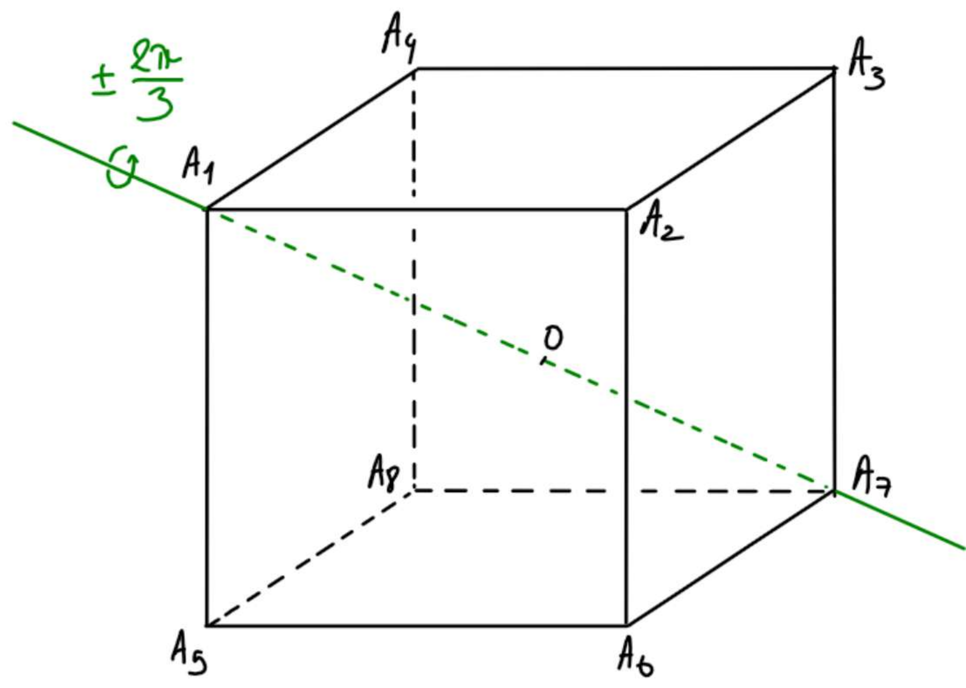
- Notons ρ_z la rotation d'axe (Oz) d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et ρ_y la rotation d'axe (Oy) et d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui sont bien positives. On a alors :

$$\begin{array}{llll} A_1 = id_{\mathbb{R}^3}(A_1) & A_2 = \rho_z(A_1) & A_3 = \rho_z^2(A_1) & A_4 = \rho_z^3(A_1) \\ A_5 = \rho_y(A_1) & A_6 = \rho_y^2(A_1) & A_7 = \rho_z^2\rho_y(A_1) & A_8 = \rho_z^3\rho_y(A_1) \end{array}$$

Donc $S = Is^+(S) \cdot A_1$, donc cette action est transitive.

NE PAS ÉCRIRE ÇA : FAIRE CE DESSIN

- Soit $\varphi \in \mathrm{Stab}(A_1)$. Par conservation des distances, φ permute $\{A_2, A_4, A_5\}$. Comme φ permute $\{A_2, A_4, A_5\}$, mais φ est caractérisée par $\varphi(A_1) = A_1$ et $\varphi(A_2)$, a fortiori par $\varphi(A_2)$. Ainsi $\#\mathrm{Stab}(A_1) \leqslant 3$. Or $id_{\mathbb{R}^3}$ et les rotations d'angles $\pm\frac{2\pi}{3}$ d'axe (OA_1) sont dans $\mathrm{Stab}(A_1)$, donc $\#\mathrm{Stab}(A_1) \geqslant 3$, puis $\#\mathrm{Stab}(A_1) = 3$.



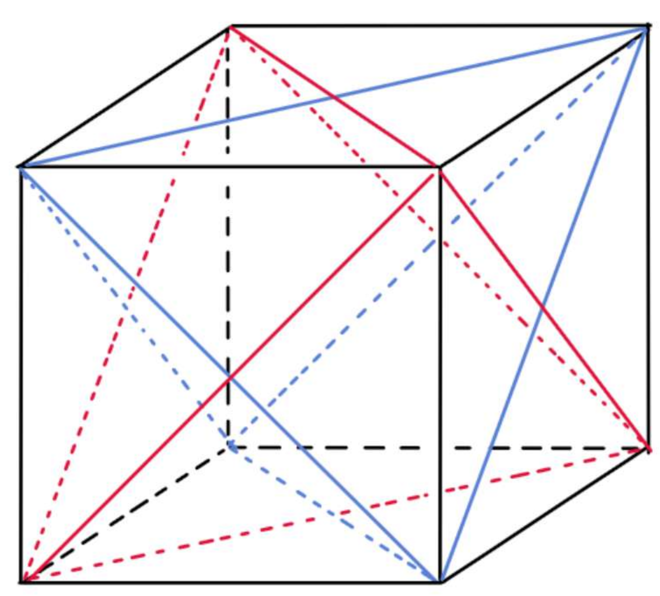
- D'après la relation orbite-stabilisateur,

$$\# Is^+(S) = \#\mathrm{Orb}(A_1) \#\mathrm{Stab}(A_1) = 8 \times 3 = 24 \quad \blacksquare$$

COMMENTAIRES

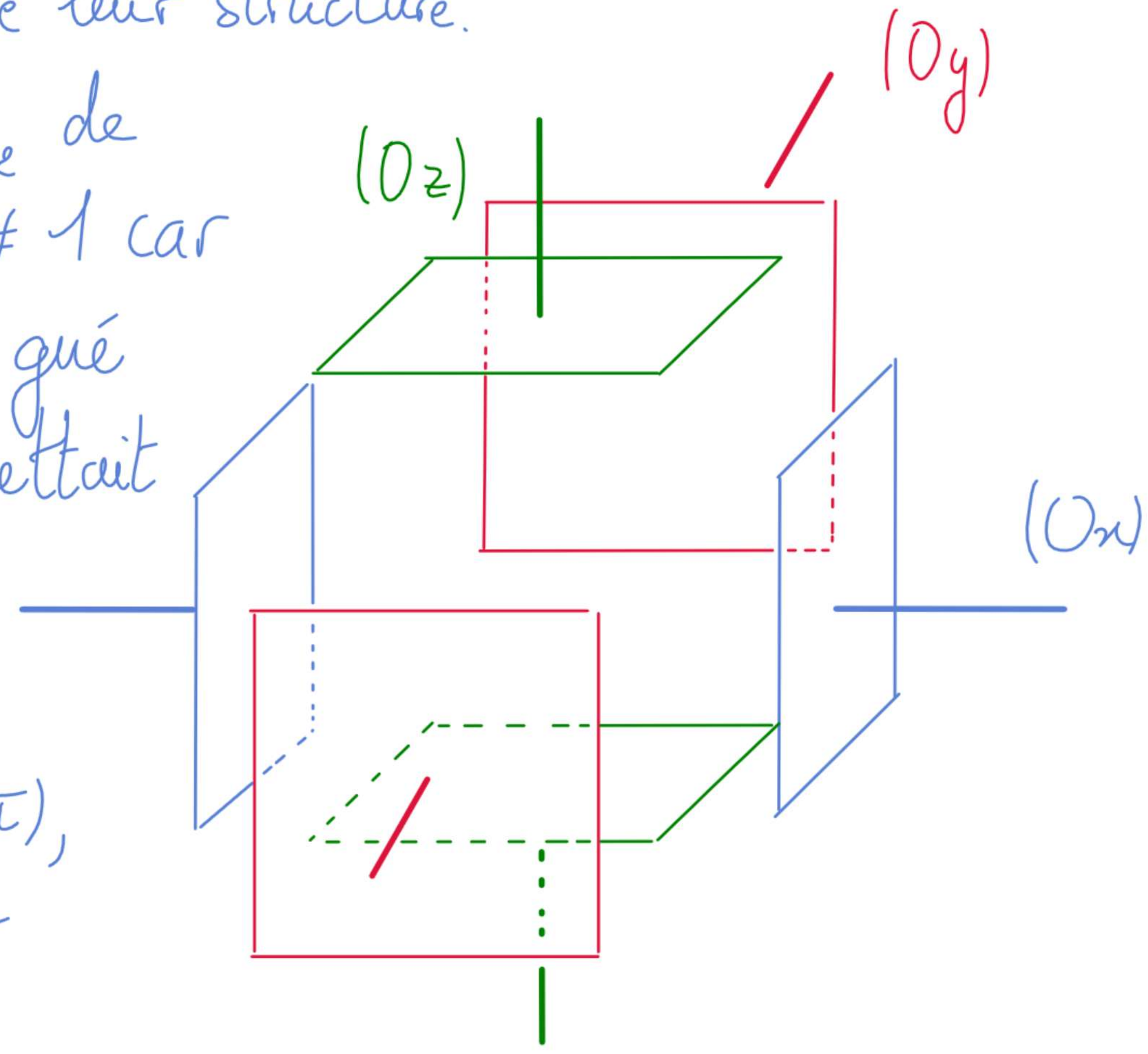
▸ Le détail de 2▸ est fait dans le Caldero en p219. Le reste peut être trouvé dans le Rombaldi (attention cependant, ce-dernier engendre des plans avec deux points... cf. Lemme 3.2 (correspondant à II) où la rédaction est ambiguë.

▸ Questions d'ouverture :



- Comment déduire les isométries positives du tétraèdre régulier à partir de celles du cube ? Réponse : $Is^+(S)$ agit transitivement sur l'ensemble des deux tétraèdres inscrits dans le cube comme ci-contre, donc le stabilisateur du premier tétraèdre est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ d'indice 2, i.e. à $\mathcal{A}_4$. Or $Is^+(\mathcal{T})$, avec $\mathcal{T}$ le tétraèdre, s'injecte dans $\mathrm{Stab}(\mathcal{T})$, donc $Is^+(\mathcal{T}) = \mathrm{Stab}(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{A}_4$.

- Déterminer géométriquement les 2-Sylow de $Is^+(C)$ et en déduire leur structure.



Réponse : d'après les théorèmes de Sylow, le nombre n_2 de 2-Sylow de $Is^+(C)$ est impair et divise 3. Or $n_2 \neq 1$ car sinon l'unique 2-Sylow serait un sous-groupe distingué de $Is^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ de cardinal 8. Or si $\mathfrak{S}_4$ admettait un sous-groupe distingué H de cardinal 8, alors on disposerait d'un morphisme surjectif $\pi : \mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_4/H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Or si $\tau \in \mathfrak{S}_4$, alors $\bar{0} = \pi(id) = \pi(\tau^2) = \bar{2}\pi(\tau)$, donc $\pi(\tau) = \bar{0}$, donc π est constante nulle, ce qui est contradictoire.

Ainsi, $n_2 = 3$. Remarquons que les rotations préservant (Ox), (Oy) ou (Oz) forment un groupe d'ordre 8 : en effet, ce groupe est engendré par la rotation d'axe (Ox) (ou (Oy) ou (Oz)) d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation renversant cet axe. On voit alors que les 2-Sylow sont de cardinal 8, et isomorphes à $D_{2\times 4}$ (groupe diédral d'ordre 8).