

Critère de Klarès:

Thm: E $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\text{ad}_u: v \mapsto uv - vu$,
 $\text{ad}_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$. Alors:
 u est diagonalisable ssi $\ker \text{ad}_u = \ker \text{ad}_u^2$

Don: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on écrit $u = d + n$: $\begin{cases} d \text{ diagonalisable} \\ n \text{ nilpotent} \end{cases}$ (Dunford)

① Montrons qu' $\exists v \in \mathcal{L}(E)$, $n = u \circ v - v \circ u$

Considérons $M_k := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Alors: pour J_k la matrice de Jordan $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k \end{matrix}$, on a le résultat:

$$J_k M_k - M_k J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = J_k$$

Ainsi: soit F_λ ss-esp. caractéristique de u associé à la valeur propre λ ,

$$u|_{F_\lambda} = \lambda \text{Id}_{F_\lambda} + n|_{F_\lambda}, \quad n|_{F_\lambda} \text{ nilpotente}$$

Par décomposition de Jordan, il existe une base B de F_λ telle que

$$N_\lambda := \text{mat}_B^B(u|_{F_\lambda}) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_r} \end{pmatrix} \text{ où } (k_1, \dots, k_r) \text{ partitionne } \dim(F_\lambda)$$

$$\text{En posant } V_\lambda = \begin{pmatrix} M_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{k_r} \end{pmatrix} \text{ on obtient } N_\lambda = N_\lambda V_\lambda - V_\lambda N_\lambda$$

Cela nous donne $V_\lambda \in \mathcal{L}(F_\lambda)$ tel que $n|_{F_\lambda} = n|_{F_\lambda} \circ V_\lambda - V_\lambda \circ n|_{F_\lambda}$

$$\text{On } u|_{F_\lambda} = \lambda \text{Id} + n|_{F_\lambda}, \text{ d'où } n|_{F_\lambda} = u|_{F_\lambda} \circ V_\lambda - V_\lambda \circ u|_{F_\lambda}$$

Posons v l'unique endomorphisme sur E coïncidant avec V_λ sur chaque F_λ .

On obtient alors $n = u \circ v - v \circ u$

→ savoir justifier au moins l'existence!

$$(\bigoplus_{\lambda \in \sigma} F_\lambda = E \text{ car } E \text{ } \mathbb{C}\text{-ev})$$

② cf. contraindre le critère:

⊆: Supposons que $\ker ad_u = \ker ad_u^2$; c'est équivalent

à $\ker ad_u \cap \operatorname{Im} ad_u = \{0_{L(E)}\} \rightarrow$ savoir le justifier, au moins le sens direct

• m est un polynôme en u

donc commute avec u : $m \in \ker ad_u$

• De plus, nous avons montré que $m \in \operatorname{Im} ad_u$

Donc $m=0$ et $u=d$ diagonalisable.

⇒: Supposons u diagonalisable.

$\forall f \in L(E)$ posons $\phi_f : L(E) \rightarrow L(E)$ et $D_f : L(E) \rightarrow L(E)$
 $v \mapsto f \circ v$ $v \mapsto v \circ f$

On remarque que ϕ et D sont des applications linéaires

et que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in L(E)$:

$$(\phi_f)^k = \phi_{(f^k)} \quad \text{et} \quad (D_f)^k = D_{(f^k)}$$

Ainsi:

Les polynômes annulateurs de u annulent ϕ_u et D_u .

Donc par critère de diagonalisation (polynômes)

u diagonalisable nous donne ϕ_u et D_u diagonalisables

Par ailleurs:

$$\phi_u \circ D_u = (v \mapsto u \circ v \circ u) = D_u \circ \phi_u$$

Donc ϕ_u et D_u admettent une base de co-diagonalisation. → mettre ce résultat dans la leçon

C'est une base de diagonalisation de $ad_u = \phi_u - D_u$

Donc ad_u diagonalisable, cela nous donne $\ker ad_u = \ker ad_u^2$

→ savoir le justifier

