

Logarithme et Théorème de Brouwer

Leçons concernées. 204, 267.

Référence. *131 Développements pour l'oral*, Pierre Le Barbenchon & Co.

Remarques. Dans le développement initial, il est proposé de démontrer également la proposition 2 et le lemme 3, ce qui me semble être un programme un peu trop chargé. La démonstration de la proposition 2 est un classique de la théorie des groupes topologiques et s'insère à mon avis bien dans le plan, et le lemme 3 ne présente pas un très grand intérêt.

Ce développement ne se recase pas énormément, mais il a l'avantage de couvrir deux leçons difficiles en terme de développements (surtout la 267) et me paraît intéressant et original.

Il est à noter que la proposition 4 est une jolie application du théorème de Heine, que l'on ne doit pas croiser si souvent.

Enfin, il vaut mieux avoir quelques idées sur ce que sont la simple connexité et les retracts, cela permet d'aborder la démonstration du théorème de Brouwer bien plus sereinement.

On a tout d'abord besoin d'un peu de théorie des groupes topologiques.

Définition 1 (Groupe topologique)

Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie pour laquelle le produit et l'inversion sont continues.

Proposition 2 Soit G un groupe topologique, supposé connexe. Tout sous-groupe H de G tel que l'élément neutre e est intérieur à H ($e \in \overset{\circ}{H}$) est égal à G .

Dans la suite, K désigne un compact étoilé de $\mathbb{R}^d$ par rapport à 0.

Lemme 3 L'ensemble $\mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$ muni du produit de fonctions et de la topologie de la convergence uniforme sur K est un groupe topologique.

Démarrons maintenant le développement à proprement parler.

Proposition 4 Le groupe $G := \mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$ est connexe par arcs.

Preuve. Tout d'abord, par connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$, toutes les applications constantes peuvent être reliées à la fonction constante égale à 1 (notée 1_G).

Soit maintenant $g \in G$, montrons que g peut être reliée à l'application constante égale à $g(0)$ (et donc à 1_G). Pour cela, on introduit le chemin

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow G \\ t & \longmapsto (x \mapsto g(tx)) \end{cases} ,$$

qui est bien défini, puisque K étant étoilé et contenant 0, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in K$, on a $tx \in K$. On a $\gamma(0) \equiv g(0)$ et $\gamma(1) = g$, donc il nous reste seulement à montrer que γ est continue.

D'après le théorème de Heine, g est uniformément continue sur K . Par conséquent, si on se donne $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$, $\|x - y\| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Soit donc $t_0 \in [0, 1]$ fixé. Fixons $M := \max_{x \in K} \|x\|$. Si $t \in [0, 1]$ est tel que $|t_0 - t| < \delta/M$, alors pour tout $x \in K$,

$$|\gamma(t_0)(x) - \gamma(t)(x)| = |g(t_0x) - g(tx)| \leq \varepsilon,$$

et donc $\|\gamma(t_0) - \gamma(t)\|_\infty < \varepsilon$.

✂

Théorème 5 (Existence d'un logarithme)

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C}^*)$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ telle que $f = \exp(g)$.

Preuve. Considérons H l'ensemble des éléments de G admettant un logarithme continu (*i.e.* vérifiant les conclusions du théorème). On va montrer que H est un sous-groupe de G et que son intérieur contient 1_G , ce qui conduira la démonstration, par connexité de G .

L'élément neutre appartient à H , car $\exp(0) = 1$.

Si $h_1, h_2 \in H$, alors il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ telles que $h_i = \exp(g_i)$ et donc $h_1 \cdot h_2^{-1} = \exp(g_1 - g_2) \in H$, puisque $g_1 - g_2 \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

(Alternative : H est l'image par le morphisme de groupes $\exp$ du groupe $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), +)$.)

Montrons maintenant que $1_G \in \overset{\circ}{H}$. Soit $g \in B_G(1_G, 1/2)$ (la boule ouverte dans G). Soit alors $f := g - 1_G$, de sorte que $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ et $\|f\|_\infty < 1/2$. On peut alors définir

$$h : \begin{cases} K & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x & \longmapsto \ln(1 + f(x)) \end{cases},$$

où $\ln$ désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Ainsi, h est continue et l'on a $g = 1 + f = \exp(h) \in H$. Par conséquent, $B_G(1_G, 1/2) \subset H$ et donc $H = G$.

✂

On démontre l'application suivante, le théorème de Brouwer en dimension 2.

Théorème 6 (Brouwer)

Toute fonction continue de D dans lui-même admet un point fixe, où D désigne le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe une application f continue de D dans lui-même sans point fixe. On va utiliser f pour construire une application continue r de D dans lui-même, égale à l'identité sur ∂D .

Pour tout $x \in D$, on a $x - f(x) \neq 0$, donc on peut définir l'application r comme l'unique intersection de ∂D avec la demi-droite ouverte d'origine $f(x)$ et de direction $x - f(x)$. On dispose donc de $t(x) > 0$ tel que $r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ et $|r(x)| = 1$. (voir Figure 1)

Notons que par définition, r est égale à l'identité sur ∂D . Montrons donc que l'application $x \mapsto t(x)$ est continue, ce qui assurera la continuité de r . Pour $x \in D$, on cherche donc $t > 0$ tel que :

$$|r(x)| = 1 \text{ i.e. } 0 = |x - f(x)|^2 t^2 + 2t \langle f(x), x - f(x) \rangle + |f(x)|^2 - 1 =: P_x(t).$$

Le polynôme P_x est un polynôme de degré 2 en t , de coefficient dominant strictement positif et tel que $P_x(0) = |f(x)|^2 - 1 \leq 0$ et $P_x(1) = |x|^2 - 1$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, P_x admet une racine réelle strictement négative et une racine réelle strictement supérieure à 1. Cette dernière est donc donnée par

$$t(x) = \frac{2 \langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta_x}}{2|x - f(x)|^2},$$

où Δ_x désigne le discriminant de P_x , qui est une fonction continue de x . Ainsi, t et donc r est une fonction continue sur D .

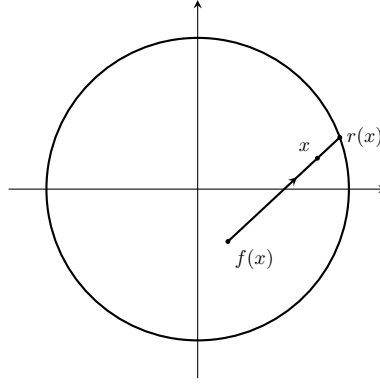


FIGURE 1 – Construction géométrique de $r(x)$.

En assimilant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, la fonction r est donc un élément de $\mathcal{C}(D, \mathbb{C}^*)$ et puisque D est un compact étoilé en 0, il existe $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{C})$ telle que $r = \exp(f)$. Or, comme $|r| = 1$, on a $\operatorname{Re}(f) = 0$ et on peut donc se donner la fonction continue $\varphi := \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$, de sorte que $r = \exp(i\varphi)$. La restriction de φ à ∂D est injective, puisque si $x, y \in \partial D$,

$$\varphi(x) = \varphi(y) \implies \exp(i\varphi(x)) = \exp(i\varphi(y)) \implies x = r(x) = r(y) = y$$

Puisque ∂D est un compact, $\varphi|_{\partial D}$ est donc un homéomorphisme de ∂D dans $I := \varphi(\partial D)$. Par ailleurs, ∂D est un compact connexe, donc I est un segment. On dispose donc d'un homéomorphisme entre le cercle unité et un segment, ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré.

✂