

5 Formule de Stirling

Développement :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de la formule : $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$

Par changement de variable $t = (x - n)/\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\ &= \int_{-\sqrt{n}}^\infty (n + \sqrt{n}t)^n e^{-(n + \sqrt{n}t)} \sqrt{n} dt \\ &= \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} dt \end{aligned}$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{n} \\ (1 + t/\sqrt{n})^n e^{-\sqrt{n}t} & \text{si } t \geq -\sqrt{n} \end{cases}$

(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2/2}$, en effet, soit $t \in \mathbb{R}$ (fixé) et $n > t^2$ de sorte que $|t| < \sqrt{n}$, on a alors :

$$f_n(t) = \frac{(1 + t/\sqrt{n})^n}{e^{\sqrt{n}t}},$$

donc lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln(f_n(t)) &= n \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t \\ &= n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{(t/\sqrt{n})^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \sqrt{n}t \\ &= -\frac{t^2}{2} + o(1), \end{aligned}$$

ce qui donne $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}$.

(f_n) est une suite de fonctions positives. On va voir que c'est une suite croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et appliquer le théorème de convergence monotone.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est nulle sur $] -\infty, -\sqrt{n}]$, donc inférieure à f_{n+1} sur cet intervalle. f_n et f_{n+1} sont > 0 et dérivables sur $] -\sqrt{n}, +\infty[$, on peut donc écrire pour tout $t > -\sqrt{n}$:

$$\frac{d}{dt} \ln f_n(t) = \frac{n}{1 + t/\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = -\frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{n} + t}$$

$$\frac{d}{dt}(\ln f_{n+1}(t) - \ln f_n(t)) = -\frac{t\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+t} + \frac{t\sqrt{n}}{\sqrt{n}+t} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})t^2}{(t+\sqrt{n})(t+\sqrt{n+1})},$$

et cette dérivée est négative car $t > -\sqrt{n}$. La fonction $\ln(f_{n+1}/f_n)$ est donc décroissante sur $] -\sqrt{n}, +\infty[$, donc f_{n+1}/f_n également par croissance de exp. Comme $f_{n+1}(0)/f_n(0) = 1/1 = 1$, on a :

- $\forall t \in] -\sqrt{n}, 0], \quad f_{n+1}(t)/f_n(t) \geq 1$
- $\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_{n+1}(t)/f_n(t) \leq 1$

Ainsi la suite (f_n) est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par théorème de convergence monotone (en séparant l'intégrale en deux) :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

D'où la formule de Stirling :

$$n! \sim \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n} \quad \square$$

Référence : <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/stirling.pdf>