
Décomposition Polaire

Recasage : 106 / 155 / 158 / 150 / 160

Référence : Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométrie p.202

On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble $\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ et $\mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives (c'est à dire qui possèdent des valeurs propres strictement positives).

Théorème 1

L'application Φ définit par :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) \longmapsto OS \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

Preuve.

► **Etape 1** : On commence par montrer que l'application est bien définie et continue.

- Définie : Soit $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ alors on sait que O est de déterminant ± 1 et que comme la matrice S définie positive alors 0 n'est pas valeurs propre alors $\det(OS) = \det(O)\det(S) \neq 0$ donc la matrice OS est bien inversible et l'application est bien définie.
- Continue : La continuité est évidente par continuité du produit matricielle (polynômiale en les coefficients de la matrice).

► **Etape 2** : Surjectivité de l'application

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrons que tMM est une matrice symétrique définie positive en effet prenons X un vecteur non nul alors ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 > 0$ car X non nul. Le théorème spectral affirme que la matrice tMM est diagonalisable dans une base orthonormée ainsi il existe une matrice P orthogonale et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs propre strictement positive telle que :

$${}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

De ce fait on pose $S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}$ ce qui est possible car les valeurs propres

sont strictement positives. De plus comme P est orthogonal alors $P^{-1} = {}^tP$ de plus :

$${}^tS = {}^t(PDP^{-1}) = {}^t({}^tP)D{}^tP = S$$

Donc S est une matrice symétrique définie positive car les valeurs propres sont strictement positives. On sait alors que $S^2 = {}^tMM$ et on pose alors $O = MS^{-1}$ et montrons que O est une matrice orthogonale.

$${}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1} {}^tMMS^{-1} = I_n$$

Ce qui donne donc que $M = OS$ avec O une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive. Ce qui montre que Φ est surjective.

► **Etape 3** : Injectivité de l'application

Supposons que $M = OS = O'S'$ avec $O, O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S, S' \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R})$ Alors en reprenant les notations de l'étape 2 on sait alors que :

$$S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = {}^tS'^tO'O'S' = S'^2$$

On considère à présent le polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ et ce pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. De fait on a :

$$\begin{aligned} S &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \right) = Q(S^2) = Q(S'^2) \end{aligned}$$

De ce fait on en déduit que S commutent avec S' et comme ces deux matrices sont diagonalisables alors elles sont codiagonalisables de fait il existe une matrice T inversibles tel que :

$$S = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} \quad S' = T \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} T^{-1}$$

Mais comme $S^2 = S'^2$ il vient alors que $\forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i^2 = \mu_i^2$ et comme ces valeurs propres sont strictement positives que $\forall i \in \{1, \dots, n\} \lambda_i = \mu_i$ et donc $S = S'$ on en déduit alors que $O = O'$ et donc Φ est injective.

► **Etape 4** : Continuité de Φ^{-1}

$$\Phi^{-1}: \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto (O, S) \end{cases}$$

et tel que $M = OS$. Pour montrer que Φ^{-1} est continue on se donne une suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers M et tel que $\Phi^{-1}(M_p) = (O_p, S_p)$ avec $O_p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ il faut donc montrer que O_p converge vers O et S_p converge vers S . On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact donc d'après le théorème de Bolzano Weierstrass il existe (O_{p_k}) une sous suite de O_p qui converge vers $\bar{O}$ de ce fait on a :

$$S_{p_k} = O_{p_k}^{-1} M_{p_k} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \bar{O}^{-1} M = \bar{S} \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+ = \mathcal{S}_n^{++}$$

Mais par unicité de la décomposition polaire il vient que $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$ et donc la suite (O_p) admet une unique valeur d'adhérence dans un compact elle converge donc vers O . De ce fait la suite (O_p) converge bien vers O et il en va de même pour (S_p) donc Φ^{-1} est continue. En conclusion Φ est bien un homéomorphisme. ■

Remarque.

On a utilisé pleins de petits résultats pour ce développement ces derniers ne sont pas sur mais il faut savoir justifier plus ou moins proprement ces petites propriétés.

Lemme 1

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I \right\}$ est compact.

Preuve.

On sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie on peut donc montrer que c'est un fermé borné. Commençons par montrer que c'est un fermé, comme l'application $\psi : M \mapsto {}^tMM$ est continue il vient que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(I_n)$ c'est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue, c'est un fermé.

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée car dans une base orthonormée l'endomorphisme associé vérifie $\|f(x)\| = \|x\| \leq 1$. Ce qui démontre la compacité. ■

Lemme 2

Soit (X, d) un espace métrique compact alors toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui possède une unique valeur d'adhérence converge l .

Preuve.

Par l'absurde supposons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans X donc $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N d(x_n, l) \geq \varepsilon$. On peut donc trouver une sous suite qui vérifie $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon$ avec $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Par compacité $x_{\varphi(n)}$ admet une valeur d'adhérence et par unicité c'est nécessairement l , on abouti à une contradiction. ■

Une application de la décomposition polaire est de pouvoir prouver la connexité de certains ensembles de matrices.

Théorème 2

L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes qui sont de plus connexes par arcs.

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0 \right\} \quad GL_n^-(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0 \right\}$$

Preuve.

► Commençons par montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ ne peut pas être connexe. L'application déterminant : $det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice donc $GL_n(\mathbb{R})$ ne peut pas être connexe. Dans le cas contraire on pourrait trouver une matrice de déterminant nul d'après le théorème des valeurs intermédiaires ce qui est impossible.

► Montrons que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ et on cherche un chemin continu la joignant à la matrice I_n . On considère alors la décomposition polaire de A c'est à dire le couple $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. On remarque alors que $det(O) = 1$ car $det(A) > 0$ et donc $O \in SO_n(\mathbb{R})$. De plus en diagonalisant la matrice S on sait alors qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^t P D P$. On pose alors pour $t \in [0; 1]$

$$\Delta(t) = tI_n + (1 - t)D$$

La matrice ${}^t P \Delta(t) P$ est une matrice symétrique réel définie positive et l'application :

$$\gamma = \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto {}^t P \Delta(t) P \end{cases}$$

est une application continue dont l'image est incluse dans $\mathcal{S}_n^{++}$ avec $\gamma(0) = S$ et $\gamma(1) = I_n$. C'est donc un chemin joignant S à I_n dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De plus $SO_n(\mathbb{R})$ étant connexe par arcs on peut alors trouver un chemin joignant O à I_n ce qui garantit l'existence d'un chemin reliant A à I_n . Donc $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et donc connexe.