Étude de la fonction Digamma

Recasage : 228

Référence :

On considère la fonction Γ d'Euler définie par $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ pour $x > 0$. On admet les résultats sur la fonction Gamma notamment la formule de Gauss Legendre :

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

La fonction Digamma est définie pour $x > 0$ comme la dérivée logarithmique de la fonction Γ à savoir $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

Lemme 1

$$\forall x > 0 \quad \ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$$

Preuve.

Soit $x > 0$ on pose alors $u_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ cette suite de fonctions étant strictement positives on peut considérer son logarithme, de fait on a :

$$\begin{aligned}
\ln\big(v_n(x)\big) &= \ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)\\
&= \ln(n!n^x) - \ln\big(x(x+1)\cdots(x+n)\big)\\
&= \ln(n!) + \ln(n^x) - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\ln(k) + x\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x+k)\\
&= -\ln(x) + x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\\
&= -\ln(x) + x\ln(n) + x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\\
&= -\ln(x) + x\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k} - \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right]
\end{aligned}$$

On souhaite passer à la limite. On sait que : $\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma$, donc il suffit de vérifier que la série de fonctions du terme de droite converge pour tout $x > 0$.

Pour cela faisons un développement limité :

$$\frac{x}{k} - \ln\left(\frac{x+k}{k}\right) = \frac{x}{k} - \left(\frac{x}{k} - \frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{x^2}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x}{k} - \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)$ converge simplement pour tout $x > 0$. De fait en passant à la limite on obtient bien :

$$\ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$$

■

Théorème 1 (Étude de la fonction Digamma)

La fonction Digamma vérifie :

— $\forall x > 0 \quad \Psi(x) = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$

— Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et Γ est log convexe et donc convexe.

— $\forall x > 0 \ \Psi(x+1) = \Psi(x) + \dfrac{1}{x}$

— $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(t)e^{-t}\, dt = -\gamma$

Preuve.

► On souhaite dériver la fonction mais il fait d'abord vérifier que l'on peut dériver termes à termes dans l'expression de $\ln\circ\Gamma$. On va donc utiliser le critère de dérivations des séries de fonctions on pose pour tout $x > 0$ $f_k(x) = \dfrac{x}{k} - \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right)$ qui est une fonction de classes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a vu que la série de fonction $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge simplement pour tout $x > 0$ reste, à voir la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout compact.

Soit $K \subset \mathbb{R}_+^*$ un compact tel que $K = [a;b]$ avec $0 < a < b$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $f_k'(x) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x} = \dfrac{x}{k(k+x)}$ ainsi pour tout $x \in [a;b]$ $|f_k'(x)| \leq \dfrac{b}{k^2}$ de fait la série des dérivées converge normalement (donc uniformément) sur tout compact. Ainsi on peut donc dériver termes à termes c'est à dire :

$$\Psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$$

► On souhaite dériver Ψ on procède de même qu'au dessus en prenant $g_k(x) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}$ pour tout $x > 0$ on a $g_k'(x) = \dfrac{1}{(x+k)^2}$ or pour tout compact $K = [a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on a $|g_k'(x)| \leq \dfrac{1}{(a+k)^2}$ qui est le terme général d'une série convergente donc la série des dérivées convergent normalement sur tout compact on peut donc dériver termes à termes :

$$\Psi'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$$

On remarque alors que $\forall x > 0$ $\Psi'(x) > 0$ donc Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ψ' est la dérivée seconde de $\ln \circ \Gamma$, cette dernière étant strictement positive on en déduit que Γ est log convexe et donc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

▶ Soit $x > 0$ On passe par les sommes partielles c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\Psi(x+1) - \Psi(x) &= -\frac{1}{x+1} - \gamma + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) + \frac{1}{x} + \gamma - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+x+1} \right) \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Finalement on a bien $\Psi(x+1) = \Psi(x) + \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

▶ Par définition $\Psi(1) = \dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$ on sait que $\Gamma(1) = 1$ et donc $\Psi(1) = \Gamma'(1) = \gamma$ or on sait que $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} t^{x-1}\, dt$ donc on retrouve bien $\displaystyle\int_0^\infty \ln(t) e^{-t}\, dt = -\gamma$

■

On peut alors calculer $\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln(2)$

De manière générale