Espace de Bergman du disque unité

Référence : Bernis "40 Développements d'analyse pour l'agrégation" pour dev / Un peu partout pour le reste

Recasage : 201 / 205 / 208 / 213 / 234 / 245

On pose $\mathbb{D}$ la boule unité (ouverte) de $\mathbb{C}$ et on définit $H = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathrm{H}(\mathbb{D})$ (qui est l'ensemble des fonctions holomorphe et de carré intégrable sur $\mathbb{D}$). On munit H du produit scalaire usuelle sur $L^2(\mathbb{D})$ à savoir ,

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{D}) \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(x)\overline{g(x)}\ dx$$

On notera $\|.\|_2$ la norme usuelle associé.

Remarque.

Les fonction intégrées sont des fonctions d'une variable complexe qui sont supposé holomorphe sur le disque unité !

Théorème 1

L'espace H est un espace de Hilbert, de plus la famille de fonction $e_n : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ définit par $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ pour tout entier n forment une base hilbertienne.

Preuve.

Etape 1 : On va démontrer une inégalité entre la topologie de la convergence uniforme (induite par $\mathrm{H}(\mathbb{D})$) et la norme 2. Soit $K \subset \mathbb{D}$, on se donne $a \in K$ et un nombre réel r de sort que $\overline{D(a,r)}$ soit inclus dans $\mathbb{D}$. On va développer f en série entière aux voisinages de a ainsi :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Ainsi comme une série entière converge normalement sur tout compact on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{D(a,r)}} f(z)\ dz &= \int_{\overline{D(a,r)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_{\overline{D(a,r)}} (z-a)^n dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \rho^n e^{in\theta} \rho\ d\theta \right) d\rho \quad \text{(Par passage en coordonnée polaire)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \int_0^r \rho^{n+1}\ d\rho \left(\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\ d\theta \right) \quad \text{(Seul le terme } n=0 \text{ n'est pas nul)} \\
&= 2\pi \frac{r^2}{2} f(a) = \pi r^2 f(a)
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $z \in K$ on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= \frac{1}{\pi r^2}\left|\int_{\overline{D(a,r)}} f(z)\ dz\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{D(a,r)}} |f(z)|\ dz \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{\overline{D(a,r)}} |f(z)|^2\ dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\overline{D(a,r)}} dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r}\|f\|_2
\end{aligned}$$

Etape 2 : Montrons que H est un espace de Hilbert, dans ce cas il suffit de montrer que H est complet pour la norme 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme 2.Soit K un compact de $\mathbb{D}$ d'après l'étape 1 on à :

$$\forall z \in K\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r}\|f_n - f_m\|_2$$

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de l'espace vectoriel H($\mathbb{D}$) qui est complet pour le norme uniforme sur tout compact, donc cette suite converge uniformément (donc simplement) vers une fonction f de H($\mathbb{D}$). De plus la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{D})$ qui est complet d'après le théorème de Riesz Fisher donc la suite converge pour la norme 2 vers g , mais on sait qu'il existe une sous suite de $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers g et par unicité de la limite $g = f$ donc $f \in L^2(\mathbb{D})$.

► Une autre façon de faire pour montrer que $f \in L^2(\mathbb{D})$ et $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} f$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{D})$ on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N \quad \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2\ d\lambda < \varepsilon^2$$

Par le Lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n - f|^2\ d\lambda = \int_{\mathbb{D}} \liminf_{m\to\infty} |f_n - f_m|^2\ d\lambda \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n - f_m|^2\ d\lambda < \varepsilon^2$$

Et donc $f_n - f \in L^2(\mathbb{D})$ et donc comme $L^2(\mathbb{D})$ est u espace vectoriel on peut affirmer que $f = f - f_n + f_n$ est bien de carré intégrable. De plus $\|f_n - f\|_2 < \varepsilon$. Ainsi H est bien un espace de Hilbert.

Etape 3 : ► Montrons que la famille est une base hilbertienne, commençon par montrer qu'elle est bien orthonormée soit $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p \neq q$:

$$\begin{aligned}
\langle e_p, e_q\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{\frac{p+1}{\pi}} z^p \sqrt{\frac{q+1}{\pi}} \overline{z}^q\ dz \\
&= \sqrt{\frac{p+1}{\pi}}\sqrt{\frac{q+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} z^p \overline{z}^q\ dz \\
&= \sqrt{\frac{p+1}{\pi}}\sqrt{\frac{q+1}{\pi}} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^{p+q+1} e^{i(p-q)\theta} d\theta\right) d\rho \\
&= 0
\end{aligned}$$

De plus $\langle e_p, e_p\rangle = 2\pi\sqrt{\frac{p+1}{\pi}}\sqrt{\frac{p+1}{\pi}}\int_0^1 \rho^{2p+1}\ d\rho = 2\pi\frac{p+1}{\pi}\frac{1}{2p+2} = 1$ Ce qui montre que la famille est orthonormée.

► Reste à montrer que la famille est totale. On se donne $f \in H$ tel que $f \in \mathrm{Vect}\{e_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$. La formule intégrale de Cauchy nous donne :

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \ d\theta$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
0 = \langle f, e_n \rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{z}^n \ dz \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^n e^{-in\theta} r dr d\theta \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_0^1 r^n 2\pi r^n a_n r \ dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \frac{2\pi}{2n+2} a_n \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$. Donc $f = 0$ ce qui montre que la famille est totale et c'est donc une base hilbertienne.

■

Annexe : On fait ici quelques rappels d'analyse complexe et une deuxième méthode pour démontrer l'inégalité demandé dans l'étape 1.

Théorème 2 (Formule de la moyenne)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors pour tout disque fermé $\overline{D}(a, r)$ on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(a + re^{it}\big) \ dt$$

Preuve.

On paramétrise alors le disque de centre a et de rayon r par $\gamma(t) = a + re^{it}$ et ce pour tout $t \in [0; 2\pi]$. De plus la formule de Cauchy nous donne :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \ dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it} \ dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \ dt$$

Ce qui achève la preuve.

■

On peut donc alors donner une autre preuve de l'inégalité de l'étape 1. Ce qui donne :

$$\int_{\overline{D(a,r)}} f(z) \ dz = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \ d\theta \right) \rho \ d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho \ d\rho = \pi r^2 f(a)$$

Et donc finalement on retrouve bien $\dfrac{1}{\pi r^2} \displaystyle\int_{\overline{D(a,r)}} f(z) \ dz = f(a)$

Le fait que si on prend une suite de fonction holomorphe qui converge uniformément sur tout compact alors la limite uniforme est aussi holomorphe vient du théorème de Weierstrass vient de la formule de Cauchy on en donne une preuve ci dessous !

Théorème 3 (Weierstrass)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers$f$ alors f est holomorphe sur Ω.

Preuve.

La fonction f est continue comme limite uniforme de fonction continue (car holomorphe). Si K est un compact de Ω et γ un chemin qui entour K alors par la formule de Cauchy :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw$$

Et comme on a une convergence uniforme sur K on peut passer à la limite dans l'interversion limite/intégrale est justifiée et donc $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ et le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale nous garantie l'holomorphie sur tout compact.

■