
Calcul de l'intégrale de Dirichlet et de Fresnel

Recasage : 236 / 245

Référence : Quéffélec Analyse complexe

Developpement 1 (Dirichlet)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Preuve.

► Avant de commencer le calcul commençons par démontrer que l'intégrale existe, en effet la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 car $\sin(x) \sim_0 x$. Reste à démontrer l'intégrabilité au voisinage de l'infini on va effectuer une intégration par partie, en effet : Pour $A > 0$

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin(x)}{x} dx &= \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &= -\frac{\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

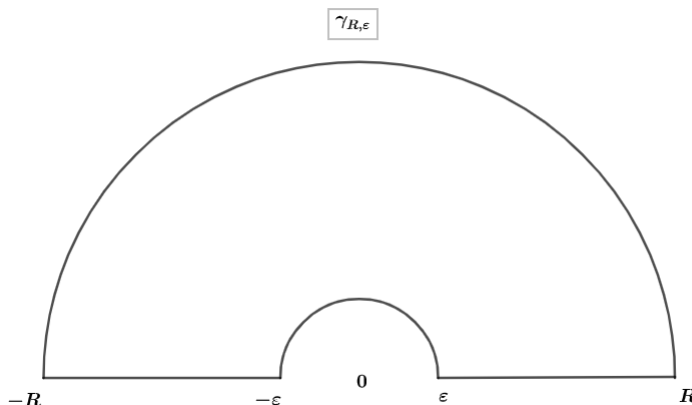
On remarque que l'intégrale de droite est absolument convergente donc convergente, de fait par passage à la limite lorsque A tend vers l'infini on obtient bien que l'intégrale est donc fini.

► Passons au calcul de l'intégrale, on commence par réécrire l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin(x)}{x} dx$$

De plus en utilisant la formule d'Euler pour le sinus on obtient :

$$\int_\varepsilon^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2i} \left(\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx \right) = \frac{1}{2i} \left(\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$



On va donc intégrer la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ sur le lacet ci contre et comme cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ on peut en conclure que l'intégrale sur ce lacet est nulle soit $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

Commençons par découper l'intégrale en 4 morceaux en paramétrisant les deux segments ainsi que les deux arcs de cercle.

Sur le demi cercle de rayon R : On utilise la paramétrisation usuelle à savoir $\Phi : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \theta \longmapsto Re^{i\theta}$ ce qui nous donne :

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi ie^{iRe^{i\theta}} d\theta$$

On étudie la convergence de cette intégrale lorsque $R \rightarrow \infty$ en effet on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi ie^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi e^{\operatorname{Re}(iRe^{i\theta})} d\theta \\ &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin(\theta)} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Cette limite est autorisée par le théorème de convergence dominée (la fonction est dominée par 1 qui est bien intégrable sur le compact $[0; \pi]$).

Sur le demi cercle de rayon ε : On utilise la même paramétrisation (en remplaçant R par ε) cependant comme on est dans le sens inverse cela se traduit par un $-$ devant l'intégrale (qui correspond à un changement de borne). Ainsi :

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_0^\pi ie^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i\pi$$

Ce passage à la limite est une nouvelle fois par le théorème de convergence dominée (1 domine encore cette fonction).

Sur le segment $[-R; -\varepsilon]$: La paramétrisation identité nous permet d'affirmer que :

$$\int_{[-R; -\varepsilon]} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Sur le segment $[\varepsilon; R]$: De même on a :

$$\int_{[\varepsilon; R]} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx$$

Finalement en passant à la limite on obtient que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = i\pi \frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

■

Developpement 2 (Fresnel)

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = \int_0^\infty \cos(t^2) dt + i \int_0^\infty \sin(t^2) dt = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Preuve.

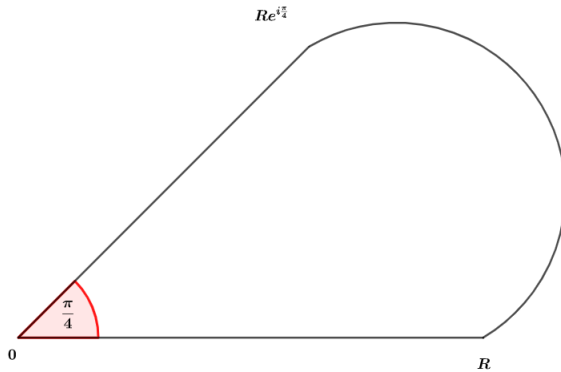
► Commençons par démontré que l'intégrale converge, on va démontré que $\int_0^\infty \cos(t^2) dt$ converge les autres se font de la même façon et repose toute sur la règle d'Abel. Effectuons le changement de variable $u = t^2$ dans l'intégrale on obtient alors :

$$\int_1^\infty \cos(t^2) dt = \int_1^\infty \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$$

comme la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est bornée et que $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante et tend vers 0 en l'infini. La règle d'Abel s'applique et les intégrales sont convergente.

► Passons au calcul comme précédemment on écrit :

$$\int_0^\infty e^{it^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{it^2} dt$$



On va donc intégrer la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le lacet ci contre et comme cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ on peut en conclure que l'intégrale sur ce lacet est nulle soit $\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0$.

Sur l'arc de cercle de rayon R : La paramétrisation $\Phi : [0; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{C} \theta \mapsto Re^{i\theta}$ nous donne :

$$\int_C e^{-z^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Toujours par le théorème de convergence dominé (un argument de concavité de la fonction cosinus marche aussi mais plus calculatoire).

Sur le segment $[0; R]$: La paramétrisation identité nous donne immédiatement :

$$\int_{[0; R]} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Sur le segment $[0; Re^{i\frac{\pi}{4}}]$: La paramétrisation $\Phi : [0; R] \rightarrow \mathbb{C} x \mapsto xe^{i\frac{\pi}{4}}$ nous donne (avec un moins pour le changement de sens) :

$$\int_{[0; Re^{i\frac{\pi}{4}}]} e^{-z^2} dz = - \int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-it^2} dt$$

Finalement on obtient par passage à la limite :

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On obtient par la même occasion :

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

■

On a utilisé l'intégrale de Gauss pour terminer les calculs donnons une preuve rapide (si jamais c'est demandé) :

Lemme 1

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Preuve.

On va calculer l'intégrale au carré (on intègre seulement sur $\mathbb{R}_+$ on retrouvera la résultat par parité) en effet $4I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$ et en vertu du théorème de Tonelli on obtient :

$$4I^2 = \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Et par un passage en coordonnée polaire on obtient :

$$4I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4} = \pi$$

Finalement $I^2 = \pi \implies I = \sqrt{\pi}$

■