
Calcul de $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx$

Recasage : 236 / 245

Référence : Analyse Complexe (Quéfelec)

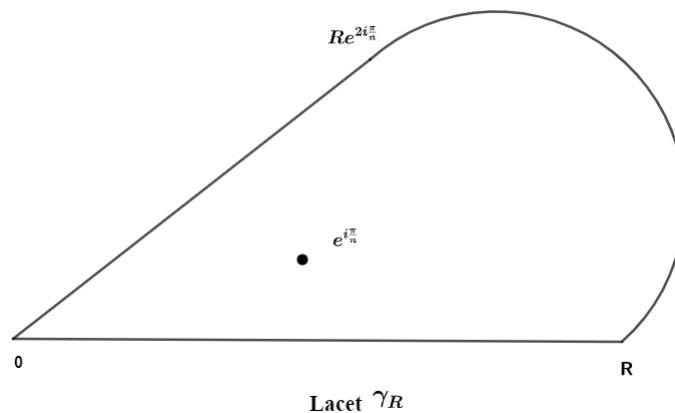
Développement 1

$$\forall n \geq 2 \quad I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Preuve.

Méthode 1 : Par les résidus

► Commençons par justifier que l'intégrale est convergente, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et de plus $\frac{1}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^n}$ et comme $n \geq 2$ cette intégrale existe bien par référence aux intégrales de Riemann. On va donc intégrer sur un lacet bien choisis représenté ci dessous :



On peut à présent utilisé le théorème des résidus appliqué à la fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^n}$ ce qui donne (puisque le point $e^{i\frac{\pi}{n}}$ est le seul pôle à l'intérieur du lacet :

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^n} dz = 2i\pi \operatorname{Re}(f, e^{i\frac{\pi}{n}}) = \frac{2i\pi}{n(e^{i\frac{\pi}{n}})^{n-1}} = -2i\pi \frac{e^{i\pi}}{n} \quad (\star)$$

On va maintenant étudier l'intégrale sur chaque composantes on va noter γ_1 le segment $[0; R]$, γ_2 l'arc ce cercle d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et de rayon R et γ_3 le segment $[Re^{2i\frac{\pi}{n}}, 0]$ (on le met dans ce sens pour bien voir dans quel sens on parcourt le chemin). On a dans un premier temps :

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^n} dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^n} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

Sur γ_2 on utilise la paramétrisation $\Phi : \left[0; \frac{2\pi}{n}\right] \rightarrow \mathbb{C} \ x \mapsto Re^{ix}$. Ce qui nous donne donc :

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^n} dz = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{1+R^n e^{inx}} iRe^{ix} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Sur γ_3 on va dans le sens opposé (cela se traduit par un moins si on veut renverser les bornes) on utilise la paramétrisation $\psi : [0, R] \rightarrow \mathbb{C} \ x \mapsto xe^{2i\frac{\pi}{n}}$ et on obtient donc :

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{1+z^n} dz = - \int_0^R \frac{1}{1+x^n(e^{2i\frac{\pi}{n}})^n} e^{2i\frac{\pi}{n}} dx = - \int_0^R \frac{e^{2i\frac{\pi}{n}}}{1+x^n} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -e^{2i\frac{\pi}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

En passant à la limite en R dans $(\star)$ on obtient finalement $I(1 - e^{2i\frac{\pi}{n}}) = -2i\pi \frac{e^{i\pi}}{n}$ reste à calculer :

$$I = \frac{2i\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} \times \frac{1}{e^{2i\pi} - 1} = \frac{2i\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} \times \frac{e^{-i\frac{\pi}{n}}}{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

■

Méthode 2 : Par Fubini et la formule des compléments

On écrit I d'une manière à avoir une intégrale double à savoir :

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t(1+x^n)} dt \right) dx$$

On va utiliser le théorème de Tonelli (Fubini positif) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t(1+x^n)} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_0^\infty e^{-tx^n} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{n}} \left(\int_0^\infty e^{-u} u^{1-\frac{1}{n}} du \right) dt \\ &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

■

On rappelle la formule des compléments :

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \Re(z) \in]0; 1[\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Cette formule peut être obtenue en connaissant le développement en produit de la fonction Γ en effet on peut montrer que :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Une idée de la preuve (si jamais c'est demandé) consiste à utiliser la formule de Legendre pour Gamma en effet on peut facilement à l'aide du théorème de convergence dominé écrire :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

cette formule se démontre en disant que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ par convergence dominée. De ce fait on peut écrire :

$$\frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n! n^x} = n^x \frac{1}{x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Et comme $e^{-x \ln(n)} = e^{x(H_n - \ln(n))} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{k}{n}}$ on peut réécrire le produit de la manière suivante (grâce à la constante d'Euler)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

(Cette écriture permet de voir que la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privée des entiers naturels négatif. A présent on sait que :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} e^{\frac{z}{n}} \frac{e^{\gamma z}}{-z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z}{n}} e^{\frac{-z}{n}} = -\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}}$$

Mais on reconnaît le développement en produit de la fonction sin c'est à dire :

$$-\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = \frac{1}{z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

On pourrait se demander comment démontrer le développement en produit du sinus mais ça sort un peu du cadre...(avoir une idée d'où ça vient c'est déjà pas mal).