
Log-Concavité du déterminant

Recasage : 152 / 158 / 253

Référence :

Théorème 1

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et α, β deux réels positifs telle que $\alpha + \beta = 1$:

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta$$

Preuve.

On va donner deux preuves de ce résultats, une preuve algébrique et une preuve analytique.

► Preuve algébrique : On utilise le théorème de réduction simultanée :

Le théorème de réduction simultanée donne l'existence de $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et de $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0 \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$. Ainsi on obtient $\det(A) = \det(P^2)$ et $\det(B) = \det({}^t P D P) = \det(P^2 D)$ de sorte que :

$$(\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta = (\det(P^2))^\alpha (\det(P^2 D))^\beta$$

De plus on sait que $\alpha + \beta = 1$ ainsi $\det(\alpha A + \beta B) = \det(P^2) \det(\alpha I_n + \beta D)$. On doit alors montrer que :

$$\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det(D))^\beta \quad \text{c'est à dire} \quad \prod_{k=1}^n (\alpha + \beta \lambda_k) \geq \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k \right)^\beta$$

Par passage au logarithme (les quantités sont positives) on doit donc montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \ln(\alpha + \beta \lambda_k) \geq \beta \sum_{k=1}^n \ln(\lambda_k)$$

Or la fonction logarithme est concave donc $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i)$ le résultat s'en suit en sommant pour sur tout i .

► Preuve analytique : On commence par démontrer le résultat suivant :

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle} dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$$

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on peut alors diagonaliser dans une base orthonormée de sorte que $A = P D P^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose alors le changement de variable $u = P x$ de sorte que le déterminant du Jacobien soit celui de P à savoir 1 (en valeur absolue). Donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda_1 u_1^2 - \lambda_2 u_2^2 - \dots - \lambda_n u_n^2} du_1 \dots du_n$$

Et en vertu du théorème de Fubini-Tonelli et le changement de variable $u = \sqrt{\lambda_i} x_i$ (licite car les valeurs propres sont strictement positives) :

$$I = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i x_i^2} dx_i = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$$

On peut maintenant passer à la preuve de ce résultat grâce à cette relation. On va utiliser l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{\alpha}$ et $q = \frac{1}{\beta}$ donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \alpha + \beta = 1$, ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\alpha A + \beta B)}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, (\alpha A + \beta B)x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha \langle x, Ax \rangle} e^{-\beta \langle x, Bx \rangle} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Ax \rangle} dx \right)^{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, Bx \rangle} dx \right)^{\beta} \\ &\leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)^{\alpha} \det(B)^{\beta}}} \end{aligned}$$

Et donc on retrouve bien $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^{\alpha} (\det(B))^{\beta}$. Ceci est évidemment la traduction de log-concave en effet en passant en logarithme on a :

$$\ln(\det(\alpha A + \beta B)) \leq \alpha \ln(\det(A)) + \beta \ln(\det(B))$$

■

On donne une démonstration du théorème de pseudo réduction simultanée.

Lemme 1

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = {}^t P P \quad B = {}^t P D P$$

Preuve.

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'application $(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$ définit un produit scalaire de fait il existe une matrice C inversible tel que :

$${}^t C A C = I_n$$

De plus la matrice ${}^t C B C$ est une matrice symétrique donc par le théorème spectral on a l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^t Q {}^t C B C Q = D$$

On pose alors $P = C Q$ et on obtient alors le résultat voulu.

■

Remarque.

La log-concavité du déterminant est une étape dans la démonstration de l'ellipsoïde de John.