# Lemme de Morse

**Recasage** : 158/170/171/214/215

**Référence** : Rouvière : "Petit guide du calcul différentiel" (lemme p.210)

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ le sous espaces des matrices symétriques ainsi que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques . On commence par établir un lemme avant de démontrer le lemme de Morse.

**Lemme 1** (Réduction des formes quadratiques)

Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage $V_0$ de $A_0$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $h : V_0 \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall A \in V_0 \ A = {}^t h(A) A_0 h(A)$

**Preuve.**

On pose l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto {}^t M A_0 M \end{cases}$$

L'application $\Psi$ est bien définie, en effet la matrice ${}^t M A_0 M$ est bien symétrique car :

$${}^t\left({}^t M A_0 M\right) = {}^t M {}^t A_0 M = {}^t M A_0 M$$

car $A_0$ est symétrique. L'application est bien définit.

► L'application $\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. on regarde alors la différentielle en $I_n$, soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \Psi(I_n + H) &= {}^t(I_n + H) A_0 (I_n + H) \\ &= A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 + {}^t H A_0 H \\ &= \Psi(I_n) + A_0 H + {}^t H A_0 + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Ainsi $D_{I_n}\Psi(H) = {}^t(A_0 H) + A_0 H$, de ce fait on peut regarder le noyaux de cette application linéaire. Si $H \in \mathrm{Ker}(D_{I_n}\Psi)$ alors ${}^t(A_0 H) = -A_0 H$ donc $A_0 H \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}$. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'inversion locale, on va alors se restreindre sur un espace plus petit.

► On pose $F = \left\{ H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \right\}$ et on considère la restriction $\Phi$ de $\Psi$ à $F$ c'est à dire que $\Phi : F \longrightarrow \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On va cette fois ci pouvoir appliquer le théorème d'inversion locale à $\Phi$ en effet :

— $I_n \in F$ car $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$

— $D_{I_n}\Phi$ est injective car $\mathrm{Ker}(D_{I_n}\Phi) = \mathrm{Ker}(D_{I_n}\Psi) \cap F = 0$

— $\dim(F) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ ainsi $D_{I_n}\Phi$ est surjective.

On peut donc utiliser le théorème d'inversion locale qui nous donne l'existence d'un voisinage $U$ de $I_n$ dans $F$ et $V_n$ un voisinage de $\Phi(I_n) = A_0$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $\Phi$ soit un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme entre $U$ et $V_0$. De fait $\forall A \in V_0 \ \exists! M \in U \ A = \Phi(M) = {}^t M A_0 M$. On pose alors $h = \Phi^{-1}$ tel que $M = h(A)$ et donc $A = {}^t h(A) A_0 h(A)$

■

**Théorème 1** (Lemme de Morse)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$. On suppose que $D_f(0) = 0$ et que $D_f^2(0)$ est non dégénérée et que la signature de $D_f^2(0)$ est $(p, n-p)$.

<u>Alors</u> : Il existe un $\Phi$ un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

- $\phi(0) =$
- $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ avec $u = \Phi(x)$

**Preuve.**

On commence par appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 :

$$f(x) - f(0) = D_f(0) + \int_0^1 (1-t) D_f^2(tx)\ dt = \int_0^1 (1-t) D_f^2(tx)\ dt$$

.

Car par hypothèse la différentielle en 0 est nul. On peut a présent identifier la différentielle d'ordre 2 à la matrice hessienne que l'on note $H$ ainsi on peut donc affirmer que $D_f^2(tx) =^t xH(tx)x$ pour $x \in U$. De plus $f$ étant de classe $\mathscr{C}^2$ la matrice Hessienne est symétrique par le théorème de Schwartz. Ainsi :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)^t xH(tx)x\ dt =^t x \underbrace{\left(\int_0^1 (1-t)H(tx)\ dt\right)}_{=Q(x)} x$$

Ainsi $Q$ est une matrice symétrique réel et $Q(0) = \dfrac{H(0)}{2}$. D'après le lemme précédent il existe alors un voisinage $V$ de $Q(0)$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\forall A \in V\ A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$. De plus $x \longmapsto Q(x)$ est continue sur $U$ puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $U$. Ainsi il existe un voisinage $V_0$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $V_0 \subset Q^{-1}(V)$ donc $\forall x \in V_0\ Q(x) \in V$ et donc de ce fait $Q(x) = {}^t\rho\big(Q(x)\big)Q(0)\rho\big(Q(x)\big)$. Comme $Q(0)$ est inversible (car la forme quadratique est non dégénérée) on peut appliquer le théorème de Sylvester ainsi :

$$\exists A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad Q(0) = {}^tA \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} A$$

en posant alors $M(x) = \rho\big(Q(x)\big)$ on obtient alors :

$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x) = {}^tM(x){}^tA \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} AM(x) =^t (AM(x)) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} AM(x)$$

Ce qui donne alors :

$$f(x) - f(0) = {}^tx\ {}^tM(x){}^tA \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} AM(x)x = {}^t\Phi(x) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \Phi(x)$$

Ou on posé $\Phi(x) = AM(x)x$.

On a donc bien :

- $\phi(0) = 0$
- $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ avec $u = \Phi(x)$

Il reste à vérifier que que $\Phi$ définie bien un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme entre deux voisinage de 0 pour cela regardons la différentielle en 0 de $\Phi$ et montrons que cette dernière est inversible :

$$\Phi(h) - \Phi(0) = AM(0)h + o(\|h\|)$$

Or $AM(0)$ est inversible on peut donc conclure en vertu du théorème d'inversion locale.

■