# Réduction des endomorphismes normaux

**Référence** : Gourdon algèbre p.260

**Recasage** : 151 / 153 / 154 / 160 / 155 (Pour le cas hermitien)

On rappelle que si $u \in \mathscr{L}(E)$ avec $E$ un espace euclidien on désigne par $u^*$ l'adjoint de $u$ c'est à dire une application qui vérifie :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

**Définition.**

On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si $u^*$ et $u$ commutent.

**Lemme 1**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ normal et $F$ un sous espace vectoriel de $E$ stable par $u$ alors $F$ est stable par $u^*$ et $F^\perp$ est stable par $u$ et $u^*$.
Si $u$ est normal, alors pour tout sous espaces de $F$ stable par $u$, $u_{|F}$ est normal.

**Preuve.**

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ normal, alors dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ la matrice de $u$ dans cette base s'écrit donc par bloc de la façon suivante $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Montrons que $B = 0$, comme $u$ est normal on a ${}^tMM = M{}^tM$ cela se réécrit :

$$\begin{pmatrix} A\,{}^tA + B\,{}^tB & {}^tBC \\ C\,{}^tB & C\,{}^tC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix}$$

Ainsi par identification on obtient $A{}^tA + B{}^tB = {}^tAA$ et donc en prenant la trace on obtient $\mathrm{Tr}(B{}^tB) = 0$ (linéarité de la trace et $\mathrm{Tr}(A{}^tA) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$ ). Comme l'application $(A; B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire il vient que $\|B\|^2 = 0$ et donc $B = 0$. Ainsi la matrice de $u$ peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Ainsi on lit sur la matrice que $u$ est stable par $F$ et $F^\perp$ et en prenant la transposée il vient que $F$ et $F^\perp$ sont stables par $u^*$. De plus on remarque que ${}^tAA = A{}^tA$ donc $u_{|F}$ est normal.

■

**Remarque.**

Justification que $(A; B) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire :

- Bilinéaire : Par linéarité de la trace.
- Symétrique : $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}\big({}^t({}^tBA)\big) = \mathrm{Tr}({}^tBA)$
- Définie positif : $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geq 0$

**Théorème 1** (Réduction des endomorphismes normaux (cas réel))

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée $B$ de $E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \qquad (*)$$

où pour tout $i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout $j$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

**Preuve.**

On va effectuer une récurrence sur la dimension de $E$.

**<u>Initialisation</u>** : Si $n = 1$ il n'y a rien à faire.

**<u>Hérédité</u>** : Supposons que le résultat soit jusqu'au rang $n-1$ (récurrence forte). Montrons que ça reste vrai au rang $n$. On distingue deux cas, si $u$ admet une valeur propre réelle ou non.

► Supposons que $u$ admet une valeur propre réelle notée $\lambda$ et $E_\lambda$ le sous espace propre associé. Or $E_\lambda$ est stable par $u$ ainsi d'après le lemme $E_\lambda^\perp$ est stable par $u$ et $u^*$ ainsi l'endomorphisme $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal. Comme $\dim(E_\lambda^\perp) \leq n-1$ par hypothèse de récurrence il existe donc une base orthonormée $B_2$ telle que la matrice de $u_{|E_\lambda^\perp}$ soit de la forme $(*)$. En prenant une base orthonormée $B_1$ de $E_\lambda$ on obtient une base $B = (B_1, B_2)$ orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est de la forme $(*)$.

► Supposons que $u$ n'admet pas de valeur propre réelle. Alors le polynôme caractéristique de $u$ noté $\chi_u$ se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ de la façon suivante :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X^2 + \alpha_k X + \beta_k) \qquad \text{avec } \alpha_k^2 < 4\beta_k$$

Le théorème de Cayley Hamilton nous fournit alors $\chi_u(u) = 0$ ainsi au moins un des facteurs est non injectif. On peut donc poser $Q(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ un des diviseurs irréductible de $\chi_u$ et on pose $N = \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$.

— Montrons que $N \neq 0$. On peut écrire $Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ainsi $\lambda$ est racine de $Q$ et donc de $\chi_u$ ainsi $\lambda$ est une valeur propre de $u$ donc le sous espace propre est non vide ou encore $\det(u - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ Ainsi :

$$\det(Q(u)) = \det\Big((u-\lambda\mathrm{Id})(u-\overline{\lambda}\mathrm{Id})\Big) = \det(u-\lambda\mathrm{Id})\det(u-\overline{\lambda}\mathrm{Id}) = 0$$

Donc $N \neq \{0\}$.

— Soit $x \in N$, on pose $F = \mathrm{Vect}\big(x, u(x)\big)$. Comme $u$ n'a pas de valeur propre réelle alors $F$ est de dimension 2. De plus $F$ est stable par $u$ car pour $x \in N$ on a $u\big(u(x)\big) = -\alpha u(x) - \beta x \in F$ car $x \in \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$. Ainsi d'après le **Lemme** l'endomorphisme $u_{|F}$ est normal.

— On se donne donc $B_1$ une base orthonormée de $u_{|F}$ alors la matrice de $u_{|F}$ dans la base $B_1$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Comme $u_{|F}$ est normal on a $M^*M = MM^*$ on a donc la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

On a donc $b = \pm c$ or si $b = c$ la matrice $M$ est symétrique et donc admet des valeurs propres réelles ce qui est impossible par hypothèse donc $b = -c$. On en déduit donc grâce à la relation $ab + cd = ac + bd$ que $2(a-d)b = 0$ et donc comme $b \neq 0$ que $d = a$ et donc :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0$$

En conclusion comme $u_{F^\perp}$ est normal (toujours d'après le lemme) et que $\dim(F^\perp) \leq n-2$ par hypothèse de récurrence on peut donc avoir une base $B_2$ telle que la matrice de $u_{F^\perp}$ soit de la forme voulue, ainsi en concaténant les bases on obtient une base $B = (B_1, B_2)$ telle que la matrice de $u$ soit de la forme voulue, ceci valide l'hérédité et achève la récurrence.

■

**Application 1** (Théorème spectral)

Soit $f$ un endomorphisme auto-adjoint (c'est à dire que $f^* = f$) alors $f$ est diagonalisable et les espaces propres forment une base orthonormée.

**Preuve.**

Comme $f$ est auto-adjoint il est en particulier normal, ainsi il existe une base orthonormée $B$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme

$$M = \mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où pour tout $i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout $j$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Et comme $f$ est auto-adjoint la matrice $M$ est symétrique et donc les matrices $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_j \end{pmatrix}$ et donc la matrice de $f$ dans cette base est diagonale donc $f$ est diagonalisable.

■

<u>**Question possible du Jury**</u> : Montrer qu'un endomorphisme auto adjoint admet des valeurs propres réelles.

Soit $f$ un endomorphisme auto-adjoint et $X$ un vecteur propre (complexe) associé à la valeur propre $\lambda$. Alors :

$$AX = \lambda X \Longrightarrow X^*A^* = \overline{\lambda}X^* \Longrightarrow X^*AX = \overline{\lambda}X^*X \Longrightarrow \lambda X^*X = \overline{\lambda}X^*X$$

Et comme $X$ est non nul il en va de même pour $X^*X$ ainsi $\lambda = \overline{\lambda}$ .

■

**Remarque.**

On a traité ici la réduction des endomorphismes normaux dans un espace euclidien (c'est un à dire un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire). On va ici donner un résultats sur les endomorphismes normaux dans un espace hermitien (c'est à dire dans le cas complexe). A noter que le lemme 1 est aussi valable dans le cas d'un endomorphisme sur sur un espace hermitien. (Voir Oraux X-ENS Algèbre 3 page 181)

**Théorème 2**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors les conditions sont équivalentes :

1. $f$ est un endomorphisme normal ($ff^* = f^*f$)
2. $f$ est diagonalisable dans une base orthonormée
3. $\mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

**Preuve.**

► Montrons que (1) $\Longrightarrow$ (2) supposons que $f$ soit un endomorphisme normal et montrons que $f$ est diagonalisable dans une base orthonormée. On démontre alors le résultat sur la dimension de $E$ que l'on note $n$ :

**<u>Initialisation</u>** : Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontré.

**<u>Hérédité</u>** : Supposons le résultat acquis au rang $n-1$ et montrons qu'il est vraie au rang $n$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$, on note $E_\lambda$ l'espace propre associé, comme $f$ et $f^*$ commutent alors $E_\lambda$ est stable par $f$ et $f^*$ . On pose alors $F_\lambda = E_\lambda^\perp$ et on veut alors montrer que $F_\lambda$ est stable par $f$ et $f^*$. Soit $y \in F_\lambda$, $\forall x \in E_\lambda$ :

— $\big\langle x \mid f^*(y) \big\rangle = \big\langle f(x) \mid y \big\rangle = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle = 0$ donc $f^*(y) \in F_\lambda$

— $\big\langle x \mid f(y) \big\rangle = \big\langle f^*(x) \mid y \big\rangle = 0$ car $f^*(x) \in E_\lambda$ donc $f(y) \in F_\lambda$

Par stabilité on peut alors considérer la restriction sur l'espace stable $F_\lambda$ des endomorphisme $f$ et $f^*$ ces endomorphismes commutent encore et comme $\dim(F_\lambda) \leq n-1$ on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence c'est a dire qu'il existe une base orthonormée de $F_\lambda$ qui diagonalise $f_{|F_\lambda}$. En prenant une base orthonormée de $E_\lambda$ on obtient une base orthonormée de $E$ qui diagonalise $f$.

► Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (3) Supposons que $f$ soit diagonalisable dans une base orthonormée, soit $A$ la matrice de $f$ dans une base quelconque alors il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $U$ une matrice unitaire (c'est à dire qui vérifie $U^*U = I_n$ ) tel que $A = UDU^*$ de ce fait $A^*U\overline{D}U^*$ donc $AA^* = UDU^*U\overline{D}U^* = UD\overline{D}U^*$ et ainsi :

$$\mathrm{Tr}(AA^*) = \mathrm{Tr}(UD\overline{D}U^*) = \mathrm{Tr}(UU^*D\overline{D}) = \mathrm{Tr}(D\overline{D}) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

► Montrons que (3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $\mathrm{Tr}(AA^*) \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$. Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique, grâce au procédé de Gram-Schmidt on peut trigonaliser dans une base orthonormée c'est à dire qu'il existe alors $T$ triangulaire supérieur et $U$ unitaire telle que $A = UTU^*$ ainsi $A^* = UT^*U^*$ et ainsi $AA^* = UTU^*UT^*U^* = UTT^*U^*$ et donc $\mathrm{Tr}(AA^*) = \mathrm{Tr}(UTT^*U^*) = \mathrm{Tr}(TT^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\jmath=1}^{n} |t_{i,j}|^2$

Donc on a $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}|^2$ mais les $\lambda_i$ sont les coefficients diagonaux de la matrice $T$ donc $\sum_{i\neq j} |t_{i,j}|^2 = 0$ donc la matrice $T$ est diagonale et donc commutent avec $T^*$. Ainsi $AA^* = A^*A$ et donc $f$ est un endomorphisme normal.

■