Théorème de Riesz-Fisher

Recasage : 201 / 205 / 208 / 234

Référence : Daniel Li "Intégration et applications" p.208

Pour démontrer ce théorème on utilise une caractérisation des espaces vectoriels normés complet à l'aide des séries.

Lemme 1

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Preuve.

$(\Longrightarrow)$ Supposons que E soit complet et prenons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{k\geq 1} \|x_k\|$ soit convergente. Montrons que $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ est de Cauchy soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < q$:

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|x_k\| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \|x_k\| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans un Banach elle est donc convergente.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que toute série absolument convergente soit convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Ainsi par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall n, p \geq N \quad \|x_n - x_p\| \leq \varepsilon$$

On peut alors trouver une sous suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\forall k \geq 1 \ \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \dfrac{1}{2^k}$. De ce fait la série de terme générale $\sum_{k\geq 1} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est convergente, ainsi il en va de même pour la série $\sum_{k\geq 1} x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ par hypothèse. Or cette dernière est une série téléscopique, donc la suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ est convergente. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence, elle est donc convergente. Ainsi E est complet.

■

Remarque.

Comment construire la sous suite dans le sens réciproque ? On commence par prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ donc $\|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2}$ pour $n, p \geq n_1$. On a donc en prenant $p = n_1$ et $n \geq n_1$ $\|x_n - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$. On fait de même avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$ on peut trouver $n_2 > n_1$ tel que $\|x_n - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{4}$ mais alors on a $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$. On continue le processus en prenant $n_3 > n_2 > n_1$ tel que $\|x_n - x_{n_3}\| \leq \frac{1}{8}$ et donc $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{4}$ et on itère le procéssus.

Théorème 1 (Riesz-Fisher)

L'espace vectoriel normé $L^p(S,\mathscr{A},m)$ est complet pour la norme $\|.\|_p$

Preuve.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de L^p telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\|f_n\|_p$ soit convergente. Posons alors :

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|\in[0;\infty] \quad \Phi_N(x)=\sum_{n=1}^{N}|f_n(x)|$$

► Construisons un candidat limite.

Par l'inégalité de Minkowski :

$$\|\Phi_N\|_p=\left\|\sum_{n=1}^{N}|f_n|\right\|_p\leq\sum_{n=1}^{N}\||f_n|\|_p=\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|_p$$

Et en vertu du théorème de convergence monotone on a (possible car $\Phi_N\geq 0$ et est croissante en tant que somme partielles de termes positifs) :

$$\lim_{N\to\infty}\int_S\Phi_N^p\ dm=\int_S\lim_{N\to\infty}\Phi_N^p\ dm=\int_S\Phi^p\ dm$$

Ainsi d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\int_S\Phi^p\ dm=\lim_{N\to\infty}\int_S\Phi_N\ dm &= \lim_{N\to\infty}\|\Phi_N\|_p^p\\ &\leq \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|_p\right)^p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p\right)^p<+\infty\end{aligned}$$

De ce de fait Φ^p est m-intégrable et donc elle est en particulier finit presque partout et ainsi Φ est finit presque partout ce qui signifie que la série $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ converge absolument pour presque tout x. Or $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant complet la convergence absolue entraine la convergence donc on peut poser pour presque tout $x\in S$:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

► Montrons alors que $\displaystyle\left\|f-\sum_{n=1}^{N}f_n\right\|_p\xrightarrow[N\to\infty]{}0$. On souhaite utilisé le théorème de convergence dominé.

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{n=1}^{N}f_n\right\|_p^p=\int_S\left|f-\sum_{n=1}^{N}f_n\right|^p\ dm=\int_S\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n\right|^p\ dm &\leq \int_S\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}|f_n|\right)^p\ dm\\ &= \int_S(\Phi-\Phi_N)^p\ dm\end{aligned}$$

Mais $(\Phi-\Phi_N)^p\leq\Phi^p\in L^1(m)$ et $(\Phi-\Phi_N)^p\xrightarrow[N\to\infty]{}0$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominé qui nous donne $\left\|f-\sum_{n=1}^{N}f_n\right\|_p^p\xrightarrow[N\to\infty]{}0$. Ce qui achève la preuve.

■

Il reste encore le cas L^∞ à traiter car c'est une norme différente sur cette espace.

Théorème 2

$L^\infty(S)$ est un espace vectoriel normé complet pour la norme $\|f\|_\infty$

Preuve.

On utilise toujours la caractérisation des espaces vectoriels normés complet.

▶ Construisons un candidat limite.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de L^∞ tel que $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ soit convergente. Alors pour presque tout $x \in S$ on a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$. Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont complet donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente pour presque tout x. On pose alors pour presque tout $x \in S$:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$$

▶ Montrons alors que $\left\| f - \sum\limits_{n=1}^{N} f_n \right\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Or :

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Ainsi $f \in L^\infty$ et la série converge au sens de la norme $\|.\|_\infty$, ce qui démontre bien que L^∞ est complet.

■

On a utilisé dans cette preuve implicitement le lemme suivant :

Lemme 2

Soit $f \in L^\infty(X)$ alors $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$

Preuve.

Par définition $\|f\|_\infty = \inf\big\{c \in \mathbb{R}\ \forall x \in X |f(x)| \leq c\big\}$. Soit c_n une suite décroissante qui tend vers c alors il existe E_n de mesure nulle tel que $\forall x \in X \setminus E_n\ |f(x)| \leq c_n$ alors en posant $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ qui est aussi de mesure nulle comme union dénombrable d'ensemble de mesure nulle ainsi $\forall x \in X \setminus E\ |f(x)| \leq c_n$ et par passage a la limite $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$

■

Théorème 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p qui converge vers f pour la norme $\|.\|_p$ alors il existe une sous suite de (f_n) qui converge presque partout.

Preuve.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p qui converge pour la norme $\|.\|_p$ vers f. Ainsi par définition :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall n \geq N \ \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$$

Ainsi on peut donc trouver une sous suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ tel que $\forall k \geq 1 \ \|f_{n_k} - f\|_p \leq \dfrac{1}{2^k}$ de ce fait $\forall k \geq 1 \ \|f_{n_k} - f\|_p^p \leq \dfrac{1}{2^{kp}}$ et donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \|f_{n_k} - f\|_p^p$ est convergente. Donc en vertu du théorème de Beppo-Lévy on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_S |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \ dx = \int_S \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \ dx$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$ converge pour tout x donc le terme générale tend vers 0 ainsi pour presque tout x on a $\quad f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$.

■